F
62092
1509

BULETINUL
POLITEHNICEI DIN BUCUREŞTI

BULLETIN DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE BUCAREST

MITTEILUNGEN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BUKAREST

ANUL XII. — 1941
Nr. 1 şi 2 (Ianuarie şi Aprilie)

26

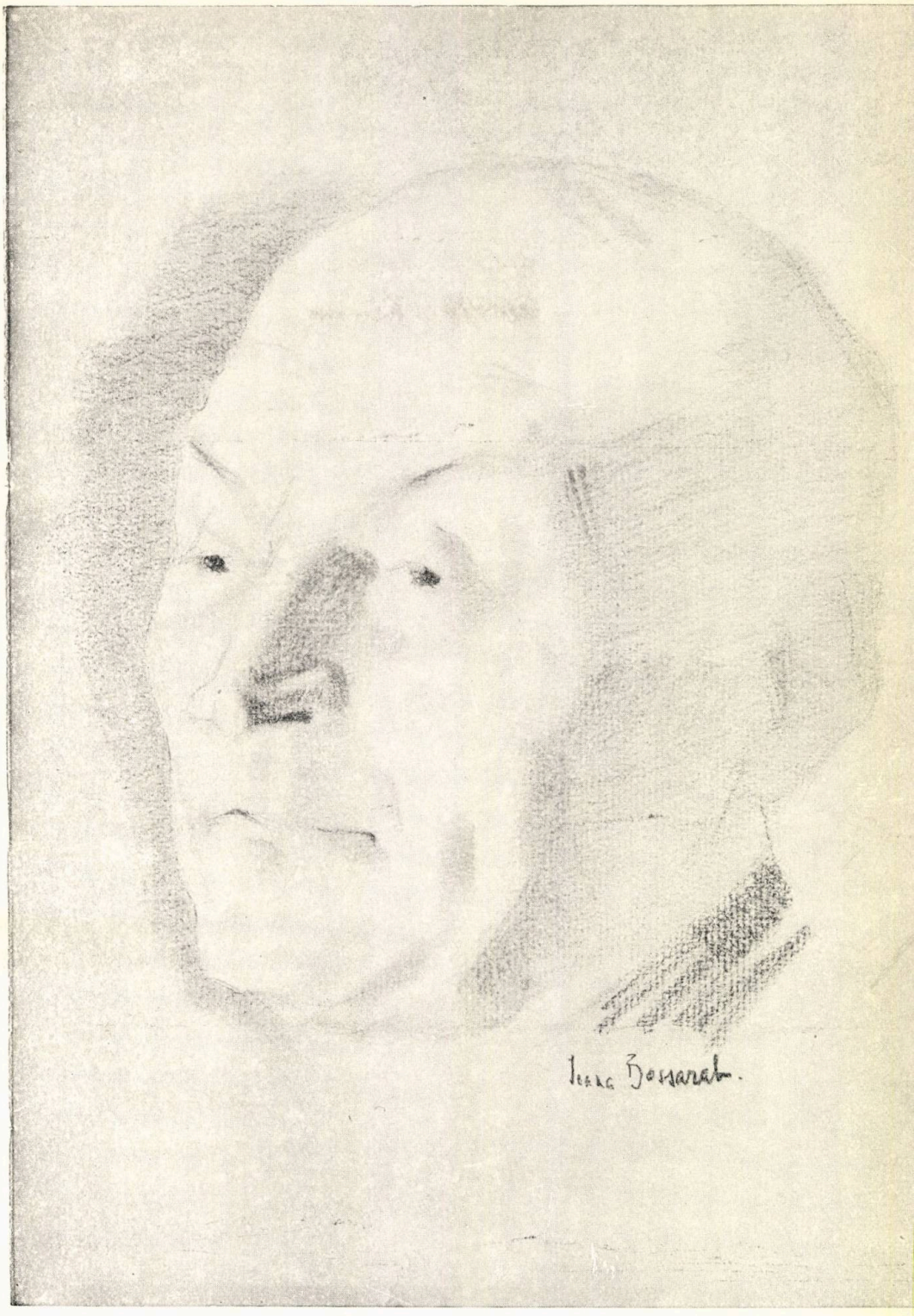
BUCUREŞTI
TIP. „FINANŢE ŞI INDUSTRIE"
1941

Le présent volume est dédié par le corps professoral de l'Ecole Polytechnique de Bucarest comme hommage d'admiration au

Professeur D. Pompeiu

à l'occasion de sa retraite après onze années d'activité féconde à cette Ecole.

Bud[illegible]i Egyetem
[illegible]vtára
[illegible]
3629



Dimitrie POMPEIU

(Reproduction d'après la revue „Numerus", IV-e vol. 1938)

513.1 GÉOMÉTRIE.

THÉORÈME DE FERMETURE

par **Nicolas Racliş**

Théorèmes de fermeture en relation avec les propositions de M. Pompeiu sur le triangle équilatéral et le carré.

1. On doit à M. D. POMPEIU deux propositions de géométrie élémentaire, démontrées à l'aide des nombres complexes:

Si, dans le plan d'un triangle équilatéral 123, *on prend un point quelconque* P, *avec les trois longueurs* P1, P2, P3, *on peut former un triangle.*

Si, dans le plan d'un carré 1234, *on prend un point quelconque* P, *avec les quatre longueurs* P1, P2, P3, P4 *on peut former une ligne polygonale fermée* (voir ce Bulletin, tome 6, 1936, pag. 6 et tome 10, 1940, pag. 3).

Un grand nombre de géomètres ont donné, en hommage à notre Maître D. POMPEIU des démonstrations géométriques et analytiques du premier théorème (voir ce Bulletin, tomes 7, 1937 et 9, 1939); quand au second théorème, voici une démonstration géométrique élémentaire: donnons au triangle P34 une translation égale à 31 = 42; il vient en P'12 et on obtient la *ligne polygonale fermée* P1P'2P, dont les côtés sont égaux aux longueurs P1, P3, P4, P2.

2. La ligne polygonale obtenue sera désignée par le symbole 1342, suivant l'ordre de ses côtés; on obtient, par des constructions géométriques aussi simples, les lignes polygonales fermées 1423, 1234, 1243, 1432, 1324, toutes formées avec les mêmes quatre longueurs P1, P2, P3, P4, prises de toutes les manières possibles. Si l'on tient compte maintenant que d'un quadrilatère donné, dont les côtés sont rigides, mais articulés aux sommets, on peut en déduire, par déformation continue de sa forme, une infinité d'autres, on voit que le deuxième théorème de M. POMPEIU est possible et il est possible de ∞^6 manières.

3. La démonstration géométrique du § 1 reste valable lorsqu'on remplace le carré 1234 par un quadrilatère 1234 dont deux côtés opposés 12 et 34 sont égaux, car on peut amener le triangle P34 en P'12, d'où le théorème:

Si, dans le plan d'un quadrilatère 1234, *dont deux côtés opposés* 12 *et* 34 *sont égaux, on prend un point quelconque* P, *avec les quatre longueurs* P1, P2, P3, P4 *on peut former une ligne polygonale fermée.*

Même concluson pour un quadrilatère gauche 1234, avec $12 = 34$, et un point P de l'espace.

Le théorème est vrai en particulier pour un parallélogramme ou pour un trapèze isoscèle.

4. Lorsque le côté 13 se réduit à zéro, le quadrilatère du § 3 se réduit à un triangle isoscèle, d'où le théorème:

Si, dans le plan d'un triangle isoscèle 123 ($12 = 13$), *on prend un point quelconque* P, *avec les quatre longueurs* P1, P1, P2, P3 *on peut former une ligne polygonale fermée.*

5. Dans le cas d'un polygone régulier de n côtés, si n est divisible par 4, $n=4\ m$, on peut diviser le polygone en m quadrilatères, dont deux côtés opposés sont égaux, et appliquer le théorème 3; si $n=4m+1$, ou $n=4m+2$, ou $n=4m+3$, on peut supposer $P1 \leqq P2 \leqq P3 \leqq P4 \leqq \ldots \leqq Pn$, et, avec les derniers 4 m sommets, former m quadrilatères dont deux côtés opposés sont égaux; avec les distances du point P aux sommets de ces m quadrilatères on peut former, suivant le théorème 3, une ligne polygonale m fois fermée. Ensuite, l'un des sommets de cette ligne polygonale peut être remplacée par un côté de longueur P1 ou P2 ou P3, d'où le théorème:

Si, dans le plan d'un polygone régulier de n *côtés* 123... n, *on prend un point quelconque* P, *avec les* n *distances* P1, P2, P3,..., Pn *on peut former une ligne polygonale* m *fois fermée, au moins,* où m *est le plus grand entier contenu dans* n: 4.

Au fond, il n'est pas nécessaire de supposer que le polygone donné est régulier; il suffit que les derniers $4m$ sommets du polygone soient les sommets de m quadrilatères, plans ou gauches, chacun ayant deux côtés opposés égaux.

Dans le cas particulier d'un polygone régulier de n côtés, n étant multiple de 3, la valeur de m est n:3, car le polygone 123... n peut être décomposé en n:3 triangles équilatéraux, de sommets k,

$n:3+k$, $2n:3+k$, $k=1, 2,...,n:3$, et appliquer le premier théorème de M. POMPEIU.

6. Considérons dans le plan deux cercles extérieurs (ou deux courbes fermées) C et c et soient Δ et δ les domaines plans limités par C et c, frontières comprises; si P est un point arbitraire de Δ et p un point arbitraire de δ, désignons par D et d le maximum et le minimum de la distance Pp. Dans le cas des cercles, si l est la distance des centres, R et r les rayons, on a

$$D=l+R+r,\quad d=l-R-r.$$

Soient donnés dans Δ, n points *arbitraires* 1, 2,..., n et dans δ, n points *arbitraires* M_1, M_2,..., M_n; posons

$$l_1=1M_1 \qquad l_2=2M_2\ ,...,\ l_n=nM_n$$

et demandons-nous quelle est la condition pour que les longueurs l_1, l_2 ,..., l_n soient les côtés d'une ligne polygonale fermée?

On peut toujours supposer, sans restreindre la généralité du problème, que

$$l_1 \leqq l_2 \leqq \cdots \leqq l_n .$$

Le problème est possible si

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1} \geqq l_n .$$

Mais toutes les longueurs l sont comprises entre d et D, donc

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1} \geqq (n-1)\,d, \qquad D \geqq l_n .$$

Une *condition suffisante* du problème est

$$(n-1)d \geqq D;$$

la condition est aussi *nécessaire*, car lorsque

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_{n-1} = d, \qquad l_n = D,$$

il faut, pour que le problème soit possible, qu'on ait

$$(n-1)d \geqq D;$$

Nous pouvons énoncer le théorème, qui reste valable même lorsque δ et Δ représentent deux domaines de l'espace:

La condition nécessaire et suffisante pour former une ligne polygonale fermée, avec les distances de n *points arbitraires de* Δ *aux* n *points arbitraires de* δ, *est* $(n-1)d \geqq D$, *où* d *et* D *représentent les distances minima et maxima des domaines* δ *et* Δ.

7. Un cas remarquable s'obtient lorsque le domaine δ se réduit à un point M; on a le théorème:

La condition nécessaire et suffisante pour former une ligne polygonale fermée, avec les distances d'un point M *à* n *points arbitraires de* Δ, *est* $(n-1)d \geq D$, *où* d *et* D *représentent les distances minima et maxima de* M *à* Δ.

8. Lorsque le domaine Δ est un cercle Γ de rayon R et centre O, on a

$$d = OM - R, \quad D = OM + R,$$

et la condition $(n-1)d \geq D$ devient

$$OM \geq nR:(n-2),$$

c'est-à-dire le point M se trouve à l'exterieur du cercle Γ' concentrique à Γ et de rayon $R' = nR:(n-2)$. On a donc le théorème:

Si 1,2,...,n *sont* n *points arbitraires du (ou intérieurs au) cercle* Γ *de rayon* R *et* M *un point arbitraire extérieur au cercle* Γ', *concentrique à* Γ *et de rayon* $R' = nR:(n-2)$, *avec les distances* M1, M2,...,Mn *on peut former une ligne polygonale fermée.*

Lorsque *n* croît, le cercle Γ' tend vers Γ, car son rayon $R' = nR:(n-2)$ *décroît et tend vers R.*

9. Pour $n = 3$, on a:

Si 123 *est un triangle arbitraire, inscrit ou intérieur au cercle* Γ *de rayon* R, *et si* P *est un point quelconque extérieur au cercle* Γ', *concentrique à* Γ *et de rayon* 3R, *avec les distances* P1, P2, P3 *on peut former un triangle.*

(Voir la suite des théorèmes dans le volume 7, 1941, de la revue *Numerus*).

SUR LES GÉODÉSIQUES DE LONGUEUR NULLE DE CERTAINS ÉLÉMENTS LINÉAIRES FINSLÉRIENS

par **N. Théodoresco** (Bucarest)

L'auteur, ayant introduit dans la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur la géométrie d'un élément linéaire finslérien, constate que les équations des géodésiques de longueur nulle résultant du transport parallèle d'un élément linéaire $(x, \dot{x})$ n'ont pas de sens pour l'élément finslérien considéré, sous la forme ordinaire. Il les met sous une forme valable même dans ce cas en utilisant, à cet effet, un nouveau tenseur fondamental dont les dérivées partielles des composantes sont finies même sur le cône isotrope.

§ 1. L'extension aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur à deux des méthodes d'intégration utilisées dans la théorie des équations du second ordre, où s'introduit la géométrie d'un ds^2 riemannien, nous a conduit d'une manière naturelle *à adopter une géométrie finslérienne* d'élément $ds^2 = \mathcal{L}^2(x,dx)$, où $\mathcal{L}(x,dx)$ est une fonction positivement homogène du premier degré en les dx^i (*).

Pour les équations à caractéristiques réelles le cône d'équation $\mathcal{L}^2 = 0$, considéré dans l'espace affine $\dot{x}$ tangent attaché au point x est réel, ce qui entraîne l'existence de directions isotropes réelles et, dans l'espace de Finsler considéré, de courbes analogues aux géodésiques de longueur nulle des espaces riemanniens. Nous avons montré que, au point de vue affine, il n'y a pas de différence entre ces courbes et les géodésiques ordinaires des espaces de Finsler, les unes et les autres étant des courbes autoparallèles. (**). En posant

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{ds} \quad ; \quad \mathcal{L}^2(x,\dot{x}) = 2\mathcal{F}(x,\dot{x}) = g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^j$$

on aura avec les notations de M. CARTAN

$$2G^i = g^{ih}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^h \partial x^k}\,\dot{x}^k - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^h}\right) \tag{1}$$

*) N. THÉODORESCO : *Recherches sur les équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre supérieur.* Annales Univ. Iassy t. 24. 1938).

**) N. THÉODORESCO ; *Géométrie finslérienne et propagation des ondes.* (Bull. Section Scientifique Académie Roumaine t. 23. 1940).

et les équations des géodésiques seront

$$(2) \qquad \frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

avec l'intégrale première $\mathcal{L}^2(x,\dot{x}) = \pm 1$ pour les géodésiques ordinaires et $\mathcal{L}^2(x,\dot{x}) = 0$ pour les géodésiques de longueur nulie, le paramètre s n'y ayant plus, bien entendu, la signification d'arc.

Cela suppose que les dérivées partielles de la fonction $\mathcal{L}^2$ par rapport à tous ses arguments sont finies et continues même sur le cône isotrope $g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$. Or, *lorsque l'élement finslérten provient d'une équation aux dérivées partielles d'ordre $n>2$, cette forme (2) des équations des géodésiques de longueur nulle ne convient plus, certains termes devenant infinis sur le cône isotrope.* En effet, on arrive à l'élément linéaire en question en partant d'une forme homogène du degré n et à m variables

$$A = a^{ij\ldots l}p_i\, p_{j\ldots}p_l \qquad \text{où} \qquad p_i = \frac{\partial G}{\partial x^i} \ ,$$

$G(x)$ étant une fonction des variables $x^1, x^2, \ldots x^m$, les coefficients $a^{ij\ldots l}$ étant les composantes d'un tenseur. L'élimination des p_i à l'aide des relations $\dot{x}^i = \frac{n-1}{n}\frac{\partial A}{\partial p_i}$ conduit à la fonction $L(x^1,\ldots x^m; \dot{x}^1,\ldots \dot{x}^m)$ positivement homogène du degré $\frac{n}{n-1}$. On a $L=(n-1)A$ et l'on pose

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = L^{\frac{n-1}{n}} \ , \ \text{donc} \ 2\mathcal{F}(x,\dot{x}) = L^{2\frac{n-1}{n}}$$

Par conséquent, le calcul de G^i donnera

$$(3) \quad 2G^i = \frac{n-1}{n}g^{ih}L^{\frac{n-2}{n}}\left[\frac{n-2}{n}L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\dot{x}^k + \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot{x}^h}\dot{x}^k - \frac{\partial L}{\partial x^h}\right]$$

et on voit que *sur le cône isotrope, donc sur les géodesiques de longueur nulle, G^i n'aurait plus de sens, tout au moins sous la forme ci-dessus,* sauf pour $n=2$, cas de la géométrie riemannienne.

Nous nous proposons de mettre ces fonctions sous une forme ayant un sens même pour les géodésiques de longueur nulle, en y remplaçant la fonction $\mathcal{F}(x,\dot{x})$ par $L(x,\dot{x})$, dont les dérivées partielles des trois premiers ordres sont finies et continues par rapport à tous ses arguments, même sur le cône $L=0$, aux points $(x,\dot{x})$ correspondant aux points (x,p) de l'espace $x^1,\ldots x^m ; p_1,\ldots p_m$ où il en est

de même des dérivées de A (x,p) en y supposant en plus, bien entendu, le hessien $\left|\frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial p_j}\right| \neq 0$.

Nous allons, par cela, remplacer le tenseur fondamental g_{ij}, qui n'a pas de sens sur $L=o$, par le tenseur $a_{ij}(x,\dot{x})$ défini par les relations

$$(4) \qquad L = \frac{1}{n-1} a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \text{ et, par suite,}$$

$$(5) \qquad a_{ij} = \frac{(n-1)^3}{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$

Nous désignerons par a^{ij} les mineurs normalisés du déterminant $a=|a^{ij}|$. Ce sont les composantes d'un tenseur contrevariant du second ordre que nous allons calculer en fonction des g^{ij}, afin de pouvoir donner à G^i la forme voulue.

§ 2. Calcul de certains éléments. — Le passage des g_{ij} aux a_{ij} se fait par les formules

$$(6) \qquad a_{ij} = (n-1)^2 L^{\frac{2-n}{n}} \left[g_{ij} - \frac{n-2}{n-1} l_i l_j \right]$$

où $l_i = \frac{\dot{x}^i}{\mathcal{L}}$, $l_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}$ sont les composantes du vecteur unitaire. On suppose donc qu'on n'est pas sur le cône $L(x,\dot{x})=0$.

Pour passer des g^{ij} aux a^{ij}, il est nécessaire d'établir quelques formules supplémentaires. *)

Calcul de Δ. Posons

$$\Delta = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \right|$$

On aura

$$\Delta = \left(\frac{n}{n-1}\right)^m L^{\frac{2-n}{n}m} \begin{vmatrix} g_{11} - \frac{n-2}{n-1} l_1 l_1 & \cdots & g_{1m} - \frac{n-2}{n-1} l_1 l_m \\ g_{21} - \frac{n-2}{n-1} l_2 l_1 & \cdots & g_{2m} - \frac{n-2}{n-1} l_2 l_m \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

*) Données sans démonstration dans notre travail précité des Ann. Iassy. Le lecteur est prié d'ajouter le terme manquant dans la formule (29) par une légère erreur d'impression.

Le déterminant à calculer est une somme de déterminants dont l'un est $g=|g_{ij}|$, d'autres ayant la forme

$$-\frac{n-2}{n-1}\,l_1\begin{vmatrix} l_1 & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ l_2 & g_{22} & \dots & g_{2m} \end{vmatrix} = -\frac{n-2}{n-1}\,l_1\begin{vmatrix} g_{1k}\,l^k & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{2k}\,l^k & g_{22} & \dots & g_{2m} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{n-2}{n-1}\,l_1\begin{vmatrix} g_{11}l^1 & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21}l^1 & g_{22} & \dots & g_{2m} \end{vmatrix} = -\frac{n-2}{n-1}\,l_1 l^1 g$$

Par conséquent,

$$\Delta = \left(\frac{n}{n-1}\right)^m L^{\frac{2-n}{n}m}\, g\left(1-\frac{n-2}{n-1}\,l_i\,l^i\right) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^m L^{\frac{2-n}{n}m}\, g$$

Calcul de Δ^{ij}. — Désignons par Δ^{ij} le mineur normalisé de l'élément $\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j}$ dans Δ. On aura

$$(-1)^{i+j}\Delta^{ij} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1} L^{\frac{2-n}{n}(m-1)} \times$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g_{11}-\dfrac{n-2}{n-1}l_1l_1 & \dots & g_{1i-1}-\dfrac{n-2}{n-1}l_1l_{i-1} & g_{1i+1}-\dfrac{n-2}{n-1}l_1l_{i+1} & \dots \\ g_{21}-\dfrac{n-2}{n-1}l_2l_1 & \dots & g_{2i-1}-\dfrac{n-2}{n-1}l_2l_{i-1} & g_{2i+1}-\dfrac{n-2}{n-1}l_2l_{i+1} & \dots \end{vmatrix}$$

et il faudra calculer des déterminants tels que.

$$-\frac{n-2}{n-1}\,l_1\begin{vmatrix} l_1 & g_{12} & \dots & g_{1i-1} & g_{1i+1} & \dots & g_{1m} \\ l_2 & g_{22} & \dots & g_{2i-1} & g_{2i+1} & \dots & g_{2m} \end{vmatrix}$$

En posant $l_k = g_{kj}l^j$ et en retranchant de la première colonne la somme des éléments des autres multipliés respectivement par l^2, l^3,.....l^{i-1},l^{i+1}....., il vient

$$-\frac{n-2}{n-1}\,l_1\begin{vmatrix} g_{11}+g_{1i}\,l^i & g_{12} & g_{1i-1} & g_{1i+1} & \dots \\ g_{21}+g_{2i}\,l^i & g_{22} & g_{2i-1} & g_{2i+1} & \dots \end{vmatrix}$$

(ne pas sommer par rapport à i)

$$-\frac{n-2}{n-1}l_1 l^1 \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \ldots & g_{1i-1} & g_{1i+1} \ldots \\ \vdots & & & \\ g_{j-1,1} & g_{j-1,2} \ldots & & \\ g_{j+1,1} & g_{j+1,2} \ldots & & \end{vmatrix} - \frac{n-2}{n-1}l_1 l^i \begin{vmatrix} g_{1i} & g_{12} \ldots & g_{1i-1} & g_{1i+1} \ldots \\ g_{2i} & g_{22} \ldots & & \\ \vdots & & & \\ g_{j-1,1} & g_{j-1,2} \ldots & & \\ g_{j+1,1} & g_{j+1,2} \ldots & & \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{n-2}{n-1}l_1 l^1 (-1)^{i+j} g\, g^{ij} - \frac{n-2}{n-1}l_1 l^i\, (-1)^{i+j-1} g\, g^{1j}$$

le premier déterminant étant $(-1)^{i+j-2} g^{ij} = (-1)^{i+j} g^{ij}$

le second étant $(-1)^{i-2}(-1)^{j-1} g^{1j} = (-1)^{i+j-3} g^{1j} = (-1)^{i+j-1} g^{1j}$

On écrira donc

$$\Delta^{ij} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1} L^{\frac{2-n}{n}(m-1)} \frac{g}{\Delta}\left[g^{ij} - \frac{n-2}{n-1} l_k\, l^k g^{ij} + \frac{n-2}{n-1} l_k\, l^i\, g^{kj}\right]$$

soit, puisque $g^{kj} l_k = l^j$ et, tenant compte de la valeur de Δ

$$\Delta^{ij} = \frac{n-1}{n} L^{\frac{n-2}{n}}\left[\, g^{ij} + (n-2) l^i l^j \,\right] \tag{6}$$

Calcul de a^{ij}. — En même temps

$$a^{ij} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1j-1} & a_{1j+1} \ldots \\ \vdots & & \\ a_{i-1,1} \ldots & & \\ a_{i+1,1} \ldots & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = \left[\frac{(n-1)^3}{n}\right]^{m-1} \frac{\Delta}{a}\, \Delta^{ij}$$

Mais

$$a = |a_{ij}| = \frac{(n-1)^{3m}}{n}\Delta \neq 0 \text{ même sur } L=0, \text{ d'où}$$

$$\Delta^{ij} = \frac{(n-1)^3}{n} a^{ij} \tag{7}$$

Par suite, on aura

$$a^{ij} = \frac{1}{(n-1)^2} L^{\frac{n-2}{n}}\left[\, g^{ij} + (n-2)\, l^i\, l^j \,\right]$$

ou bien

$$g^{ij} = (n-1)^2 L^{\frac{2-n}{n}} a^{ij} - (n-2) l^i l^j = L^{\frac{2-n}{n}}\left[(n-1)^2 a^{ij} - (n-2) L^{-1} \dot{x}^i \dot{x}^j\right] \tag{8}$$

§ 3. **Calcul de** G^i . — On peut maintenant passer au calcul des composantes $G^i(x,\dot{x})$, en supposant d'abord $L(x,\dot{x})\neq 0$ et en utilisant l'expression (8) de g^{ij} obtenue ci-dessus.

$$2G^i = \frac{n-1}{n}\left[(n-1)^2 a^{ih} - (n-2)L^{-1}\dot{x}^i\dot{x}^h\right]\left[\frac{n-2}{n}L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\dot{x}^k + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot{x}^h}\dot{x}^k - \frac{\partial L}{\partial x^h}\right]$$

Puisque $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h} = \frac{n}{(n-1)^2}a_{jh}\dot{x}^j ,$$

il vient

$$\frac{(n-1)^3(n-2)}{n^2}L^{-1}a^{th}\frac{\partial L}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\dot{x}^k = \frac{(n-1)(n-2)}{n}L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^h}\dot{x}^k a^{ih}a_{jh}\dot{x}^j$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{n}L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^k}\dot{x}^k\delta^i_j\dot{x}^j = \frac{(n-1)(n-2)}{n}L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^k$$

Ensuite

$$-\frac{(n-2)^2(n-1)}{n^2}L^{-2}\frac{\partial L}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\dot{x}^i\dot{x}^h\dot{x}^k$$

$$= -\frac{(n-2)^2(n-1)}{n^2}L^{-2}\frac{\partial L}{\partial x^k}\frac{n}{n-1}L\dot{x}^i\dot{x}^k = -\frac{(n-2)^2}{n}L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^k$$

car, vu l'homogénéité de L, on a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\dot{x}^h = \frac{n}{n-1}L$$

De même

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{n}L^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot{x}^h}\dot{x}^i\dot{x}^h\dot{x}^k = -\frac{(n-1)(n-2)}{n}L^{-1}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^h}\left(\frac{\partial L}{\partial x^k}\right)\dot{x}^h\dot{x}^i\dot{x}^k$$

$$= -(n-2)L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^k$$

car la fonction $\dfrac{\partial L}{\partial x^k}$ étant homogène du degré $\dfrac{n}{n-1}$ en les $\dot{x}^i$, on a

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^h}\left(\frac{\partial L}{\partial x^k}\right)\dot{x}^h = \frac{n}{n-1}\frac{\partial L}{\partial x^k}$$

Reste enfin à considérer les termes

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n}L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^h}\dot{x}^i\dot{x}^h \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)^3}{n}a^{ih}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot{x}^h}\dot{x}^k - \frac{\partial L}{\partial x^h}\right)$$

On voit, tout de suite, que l'ensemble des termes en L^{-1} est

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n}\left[\ 1-\frac{n-2}{n-1}-\frac{n}{n-1}+1\ \right]L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^k=0$$

Par conséquent, on aura finalement

$$(8)\qquad 2G^i=\frac{(n-1)^3}{n}a^{ih}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^k\partial\dot{x}^h}\dot{x}^k-\frac{\partial L}{\partial x^h}\right)$$

Si, maintenant l'élément linéaire a une direction isotrope, satisfaisant donc à $L(x,\dot{x})=o$, les expressions G^i conserveront bien un sens, même pour ces directions.

§ 4. **Equations des géodésiques de longueur nulle.**— Or, les géodésiques de longueur nulle sont les courbes autoparallèles résultant du transport parallèle de l'élément linéaire $(x,\dot{x})$ tangent au cône $L=o$. Ce transport étant donné par les conditions (*)

$$D\dot{x}^i=d\dot{x}^i+\frac{\partial G^i}{\partial\dot{x}^h}dx^h=0,$$

il est nécessaire que même les dérivees $\dfrac{\partial G^i}{\partial\dot{x}^h}$ aient un sens sur $L=o$, ce qui est assuré maintenant par les expressions (8) de G^i.

Cela étant, il existe un paramètre s tel que les équations des géodésiques de longueur nulle peuvent s'écrire

$$\frac{d\dot{x}^i}{ds}+\frac{\partial G^i}{\partial\dot{x}^h}\frac{dx^h}{ds}=0\qquad\text{soit}\qquad\frac{d^2x^i}{ds^2}+2G^i(x,\dot{x})=0$$

ou bien

$$(9)\qquad \ddot{x}^i+\frac{(n-1)^3}{n}a^{ih}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^h\partial x^k}\dot{x}^k-\frac{\partial L}{\partial x^h}\right)=0$$

et comme tous les éléments calculés à l'aide de a^{ij} et de ses dérivées sont finis sur le cône des directions nulles, ces équations auront un sens.

On peut en donner une autre forme à l'aide de symboles rappelant ceux de Christoffel. En effet, on a

$$\frac{1}{n-1}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^h\partial\dot{x}^l}\dot{x}^l=\frac{n}{(n-1)^3}a_{hl}\dot{x}^l$$

---

*) Voir L. BERWALD : *Über Finslersche und verwandte Räume* (C. R. du 2—e Congrès des math. Slaves. Praha, 1934, p. 10).

d'où $$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^h \partial x^k}\dot{x}^k = \frac{n}{(n-1)^2}\frac{\partial a_{hl}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^l$$

En même temps, puisque

$$L = \frac{1}{n-1}a_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l \quad , \quad \text{on a} \quad \frac{\partial L}{\partial x^h} = \frac{1}{n-1}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^h}\dot{x}^k\dot{x}^l$$

ce qui donne

$$(10) \qquad 2G^i = (n-1)a^{ih}\left[\frac{\partial a_{hl}}{\partial x^k} - \frac{n-1}{n}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^h}\right]\dot{x}^k\dot{x}^l$$

Si l'on revient à $\mathcal{F}$ et au tenseur fondamental, en supposant $n=2$ *dans ces calculs*, on obtient pour G^i l'expression

$$2G^i = \frac{1}{2}g^{ih}\left[\frac{\partial g_{hl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^h}\right]\dot{x}^k\dot{x}^l = \gamma^i_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l$$

comme en géométrie riemannienne.

Cependant ces expressions de G^i font intervenir les dérivées du troisième ordre et celles de $\dfrac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j}$ les dérivées du quatrième ordre de la fonction L, respectivement $\mathcal{F}$, ce qui n'est pas nécessaire avec les formules (9). Les équations des géodésiques seront

$$(11) \qquad \ddot{x}^i + (n-1)a^{ih}\left[\frac{\partial a_{hl}}{\partial x^k} - \frac{n-1}{n}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^h}\right]\dot{x}^k\dot{x}^l = 0$$

avec $L = 0$ pour celles de longueur nulle.

515.6 GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA PERSPECTIVE AÉRONAUTIQUE.

par **Scarlat Fotino**

Parmi les perspectives prises d'une grande hauteur, la perspective aéronautique présente des anamorphoses moins importantes, parceque le tableau est normal à la ligne moyenne de vue. Pour la mise en perspective du géometral, c'est-à-dire pour la mise en largeur et en profondeur, on utilise les droites de résection et les droites principales, en considérant l'horizon relevé. Pour la mise en hauteur, l'auteur donne une méthode originale basée sur les propriétés des figures omothétiques et de la perspective des verticales en génénal, qui dans la perspective aéronautique s'établit à l'aide du point de fuite. La mise en hauteur par cette méthode se fait avec facilité et exactité.

La méthode a deux conséquences pratiques indiquées ci-dessous.

La perspective aéronautique conduit à de meilleurs résultats que celle „à vol d'oiseau" parceque le tableau perspectif n'étant plus vertical, mais perpendiculaire à la ligne moyenne de vue, les anamorphoses sont moins importantes.

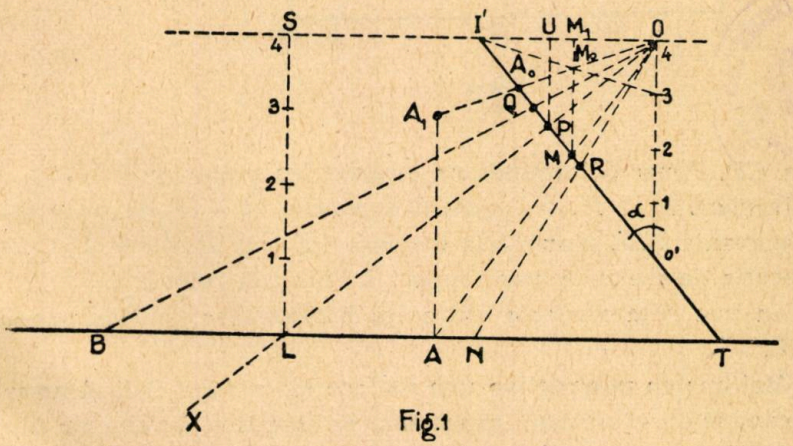


Fig.1

Supposons qu'un spectateur se trouve en *O* (fig. 1) point situé très haut dans l'air — dans la nacelle d'un ballon par exemple — et

regarde vers la terre dans le sens Ox. L'angle optique est BON et sa valeur optime est de 60^0.

Pour le spectateur, le tableau perspectif est la surface TI' normale a Ox.

Le point P est le point principal de vue; la ligne de terre passe par T; l'horizon relevé est en I'.

Si nous menons du point O la verticale Oo', le point o' sera le point de fuite de toutes les lignes verticales.

Pour mettre en perspective, il faut rabattre le tableau et tracer: l'horizon normal $I\ I$ (fig. 2), l'horizon relevé $I'I'$, et la ligne de-

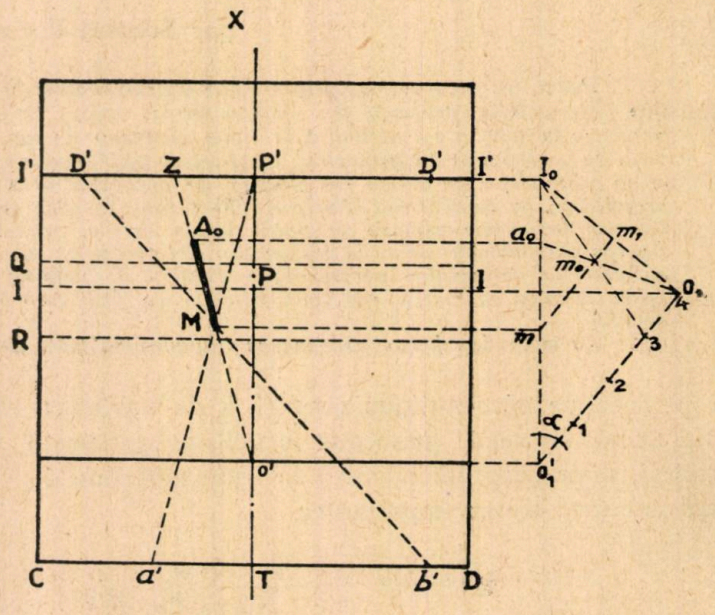


Fig.2

terre CD. Nous déterminerons ensuite les points principaux, respectivement P et P', et, prenant à gauche et à droite du point P' les segments $P'D'$, égaux à la distance OI' (fig. 1), nous obtiendrons les points de distance, par rapport à l'horizon relevé.

La vue sera normale entre les horizontales menées par Q et par R.

Mettons en perspective une surface de terrain: Soit A un point quelconque du géometral, rapporté à la base tt et à l'axe xx (fig. 3), prenons le segment Ta' égal à xa (fig. 3). Par le point a' menons la fuyante principale $a'P'$. Du point a' mesurons la longueur $a'b'$

(fig. 2) égale à *Aa* (fig. 3). L'intersection de la droite *b' D'* qui est la perspective de la droite d'égale resection avec *a' P'*, sera le point *M* qui est la perspective du point *A*.

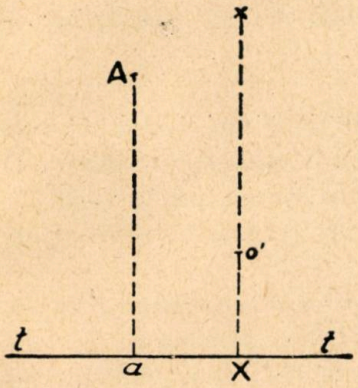


Fig.3

Le point *o'* étant le point de fuite des verticales, la ligne *o' M Z* représentera une verticale passant par le point *M*.

Les anamorphoses de la perspective aéronautique étant plus réduites, ce genre de perspective s'appliquera beaucoup mieux à un terrain vaste, à la vue d'une ville, etc.

Nous avons montré de quelle manière un point *A* du géometral peut être mis en perspective.

Mais comment peut-on mettre *en hauteur* un point A_1 situé sur la verticale du point *A* (fig. 1) à une hauteur connue?

Nous donnons à ce sujet la *méthode propre suivante:*

Considérons l'horizontale qui passe par *o'* (fig. 2). En partant d'un point quelconque o'_1 situé sur cette horizontale, menons la droite $o'_1 o_1$, qui fait, avec la verticale, l'angle α, c'est-à-dire l'angle que le tableau fait avec la verticale. Du point I_0 (fig. 2) — l'intersection de l'horizon relevé *I'I'* avec la verticale du point o'_1 — menons la droite $I_0 O_1$, qui fait avec *o' O*$_1$ un angle de 90^0.

Supposons que l'horizon relevé *OI'* (fig. 1) se trouve, par exemple, à 400 m. au-dessus du géometral.

Nous dessinerons sur la verticale *LS* l'échelle des hauteurs (les points de division 1, 2, 3, 4).

Divisons aussi la droite $o'_1 O_1$ en un même nombre de parties égales (fig. 2), prenant le point o'_1 pour origine.

Supposons que le point A_1 (fig. 1) — dont nous cherchons la perspective — a une hauteur de 300 m.

Joignons I_0 avec le point de division *3* de l'echelle *o' O*$_1$. Nous avons déjà trouvé que le point *A* du géometral a comme perspective le point *M* (fig. 2).

Considérons l'horizontale de *M*. Par le point *m* — intersection de l'horizontale menée par *M*, avec la verticale $I_0 o'_1$ — menons la droite mm_1, parallèle à la droite $o'_1 O_1$. Elle coupe $I_0 3$ en m_0. Joignons O_1 à m_0 et prolongeons cette droite jusqu'en a_0.

Par le point a_0 menons une horizontale à gauche. Elle coupe la droite $o'MZ$ en A_0.

Le point A_0 est la perspective du point A (fig. 1); MA_0 (fig 2) est la perspective de la verticale AA_1 (fig. 1).

En effet, considérons les triangles OSL et OUP (fig. 1) homothétiques par rapport au centre O.

La perspective de SL est PI'.

Considérons aussi les triangles $I'\ UP$ et $I'\ Oo'$, homothétiques par rapport au centre I'. Si nous joignions le centre d'homothétie O avec les points de division égale 1, 2, 3, 4, situés sur la verticale SL, nous obtiendrions les points de division égale correspondants sur la droite UP.

Si nous menions des droites par le centre d'homothétie I' et par les points de division égale obtenus sur UP et si nous les prolongions jusqu'à l'intersection de la verticale Oo', nous obtiendrions sur celle-ci d'autres points de division égale, c'est-à-dire une autre échelle des hauteurs, ayant o' pour origine.

Connaissant la hauteur d'un point A_1 (300 m. par exemple) nous pourrions la mesurer sur l'échelle $o'O$.

Joignons le point obtenu (3) au point I'. Du point M — la perspective du pied de la verticale AA_1 — nous menons la verticale MM_1 qui coupe $I'3$ en M_0.

Prolongeant la droite OM_0 à gauche, jusqu'au tableau perspectif, ous obtenons le point A_0, — la perspective aéronautique de A_1.

Toutes ces constructions géometriques expliquent l'épure de la figure 2.

La mise en hauteur, dans la perspective aéronautique, peut donc être faite, avec la plus grande facilité et exactité.

Conséquences:

a) Connaissant la perspective aéronautique d'une hauteur et sachant la hauteur du point de vue, on peut déduire facilement sa hauteur réelle.

b) Connaissant la perspective aéronautique d'une hauteur et sachant sa hauteur réelle, on peut déterminer la hauteur du point de vue.

UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

par **I. Cârstoiu**

Le théorème que nous exposons a une certaine parenté avec le célèbre théorème de Pascal.

La démonstration est faite en utilisant un lemne connu de Sturm, *dont on se sert d'ailleurs, souvent, pour démontrer le théorème même de* Pascal.

La présente note fait connaître une propriété intéressante des coniques, que j'ai remarquée, il y a déjà longtemps, alors que j'étais étudiant à la Faculté des Sciences de Bucarest.

Elle n'a pas été toutefois publiée.

Je trouve l'heureuse occasion de le faire aujourd'hui, en hommage à mon vénéré maître et grand ami, M. D. Pompeiu.

1. Soient A et B deux points dans le plan d'une conique Γ. Par ces points on mène une conique C_1 qui coupe la conique Γ en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

Par les points A, B et M_1, M_2 on mène une conique C_2, qui coupe encore la conique Γ en deux points M_5, M_6. De même, la conique C_3 menée par les points A, B et M_3, M_4 coupe encore la conique Γ en M_7, M_8.

Nuos voulons démontrer que *les points* A, B, M_5, M_6, M_7, M_8 *se trouvent sur une même conique* C_4.

La démonstration sera faite par réduction à l'absurde. Nous allons utiliser pour cela le lemme suivant, dû à *Sturm:*

Quand trois coniques ont deux points communs, les trois droites passant par les deux autres points communs à chaque couple formé par deux des trois coniques sont concourantes. [1])

Supposons que les points A, B, M_5, M_6, M_7, M_8 ne se trouvent pas sur une même conique.

Soit alors la conique C_4 qui passe par les points A, B, M_5, M_7, M_8 et soit M'_6, le point, différent de M_6, où C_4 coupe encore Γ.

---

1) Voir p. ex. *B. Nlewenglowski, Cours de Géométrie Analytique, Tome II.*

Considérons les coniques Γ, C_1, C_2; elles ont deux points M_1, M_2 communs. D'après le lemme de *Sturm*, les trois sécantes AB, $M_3\,M_4$, $M_5\,M_6$ sont concourantes dans un point P.

De même, en considérant les coniques Γ, C_3, C_4 ayant les points M_7, M_8 communs, il s'ensuit que la droite $M_5\,M'_6$ passe par le point P de concours des droites $A\,B$, $M_3\,M_4$.

D'où, il en résulte que la droite $M_5\,M'_6$ se confond avec la droite $M_5\,M_6$.

Ainsi les points M_5, M_6, M'_6 appartiendraient à une conique C_4 et a une droite; ou encore, cette dernière couperait la conique C_4 en trois points.

Le point M'_6 ne peut être que confondu avec M_6. La démonstration est finie.

2. Si l'on suppose que les points A, B se trouvent à l'infini confondus avec les points *absolus (cycliques)* du plan, les coniques C $(i = 1, 2, 3)$ étant des cercles, la conique C_4 est aussi un cercle.

Nous allons étudier analytiquement ce dernier cas.

On va distinguer trois cas suivant que Γ est ellipse, hyperbole ou parabole.

a) Γ, *ellipse*. On peut la considérer représentée par les formules

$$x = a\cos\theta \qquad\qquad y = b\sin\theta$$

Les points M_1, M_2, M_3, M_4 étant situés sur un cercle on a la relation [1])

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2k_1\pi$$

En écrivant de même, que les points M_1, M_2, M_5, M_6 *et* M_3, M_4, M_7, M_8 sont concycliques, on a

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_5 + \theta_6 = 2k_2\pi$$
$$\theta_3 + \theta_4 + \theta_7 + \theta_8 = 2k_3\pi$$

D'où, par addition et en tenant compte de la première relation, on a

$$\theta_5 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_8 = 2k_4\pi$$

qui montre que les points M_5, M_6, M_7, M_8 se trouvent sur un même cercle.

Parce que cette méthode de calcul ne s'applique pas aussi à l'hyperbole, nous allons reprendre le calcul, en supposant, cette fois-ci, l'ellipse représentée par les formules

$$x = a\frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \qquad\qquad y = b\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda i}$$

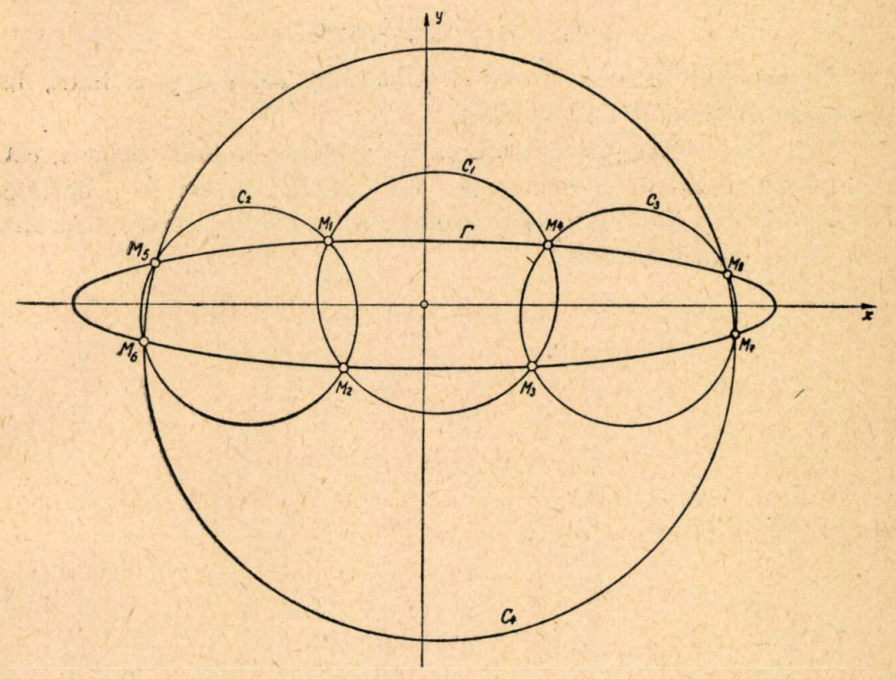
i étant le symbole imaginaire, $i = \sqrt{-1}$.

1) *B. Niewenglowski, loc. cit.*

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de l'ellipse soient situés sur un cercle est alors la suivante

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = + 1$$

comme il résulte immédiatement, en écrivant les relations entre les coefficients et les racines de l'équation du quatrième degré en λ, obtenue en remplaçant les valeurs ci-dessus de x et y dans l'équation d'un cercle quelconque $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.



Parce que les points M_1, M_2, M_5, M_6 et M_3, M_4, M_7 M_8 sont concycliques on a donc les relations

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 = + 1$$
$$\lambda_3 \lambda_4 \lambda_7 \lambda_8 = + 1$$

D'où

$$\lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 = + 1$$

qui montre que les points M_5, M_6, M_7, M_8 sont situés aussi sur un cercle.

b) Γ, *hyperbole*. La démonstration se fait d'une manière analogue, en supposant l'hyperbole représentée par les formules

$$x = a\frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \qquad y = b\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}$$

c) Γ, *parabole*. Nous allons la représenter par les équations

$$x = \frac{\theta^2}{2p} \qquad y = \theta$$

Dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points M_i $(i=1, 2, 3, 4)$ soient sur un cercle est la suivante

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

Moyennant cette relation et procédant comme plus haut, le théorème se démontre facilement.

3. Le cas où Γ se décompose en un système de deux droites, est extrêmement simple à démontrer, en utilisant p. ex. la propriété de la puissance d'un point par rapport à un cercle; nous ne ferons plus cette démonstration.

SUR LES PARABOLES INSCRITES À UN TRIANGLE

par **César Coşniţa**

Théorèmes concernant les paraboles inscrites à un triangle et tangentes aux droites remarquables attachées au triangle donné.

I. Etant donné un triangle ABC, que nous prendrons pour triangle de référence et α, β, γ étant les coordonnées barycentriques d'un point M, on sait (voir, par exemple, mon étude sur les *coordonnées barycentriques* dans le quatrième Cahier des *Annales Roumaines de Mathématiques*, édition Vuibert, Paris 1941) que l'équation de toute droite est

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

u, v, w étant inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques α_0, β_0, γ_0 du pôle trilinéaire de la droite par rapport au triangle ABC. Ces trois nombres u, v, w sont les coordonnées tangentielles trilinéaires de la droite. Dès lors, l'équation tangentielle des coniques inscrites au triangle ABC, s'écrit:

$$lvw + mwu + nuv = 0, \tag{1}$$

l, m, n étant des nombres donnés.

Si A′, B′, C′ sont les points de contact de la conique avec BC, CA, AB, les équations de ces points sont:

$$mw + nv = 0, \quad lw + nu = 0, \quad lv + mu = 0,$$

par conséquent les droites AA′, BB′, CC′ passent par un même point $\nu\left(\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$, que nous appellerons, par extension, point de *Gergonne* de la conique par rapport au triangle ABC, ou point de *Lemoine* de la conique par rapport au triangle A′B′C′.

Considérons les coniques inscrites au triangle ABC et tangentes à une droite fixe (u_0, v_0, w_0); on aura la condition:

$$lv_0w_0 + mw_0u_0 + nu_0v_0 = 0,$$

$$\frac{l}{u_0} + \frac{m}{v_0} + \frac{n}{w_0} = 0.$$

Le lieu des points de *Gergonne* des coniques est donc:

$$\frac{1}{u_0\alpha} + \frac{1}{v_0\beta} + \frac{1}{w_0\gamma} = 0,$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha} + \frac{\beta_0}{\beta} + \frac{\gamma_0}{\gamma} = 0, \tag{2}$$

c'est-à-dire la conique circonscrite au triangle ABC et ayant le point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ pour point de *Lemoine.*

Par exemple, *si l'on considère les coniques inscrites à un triangle et tangentes à la droite de* Lemoine *du triangle, le lieu géométrique des points de* Gergonne *de ces coniques est le cercle circonscrit au triangle.*

Désignons par ν' *(l, m, n) le réciproque* du point ν *et par* $N\left(\frac{a^2}{l}, \frac{b^2}{m}, \frac{c^2}{n}\right)$ *l'isogonal* du point ν'. Les lieux géométriques des points ν', N sont, comme on sait, une droite et une conique, ayant pour équations respectivement:

$$\alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma = 0, \tag{3}$$

$$\frac{a^2\alpha_0}{\alpha} + \frac{b^2\beta_0}{\beta} + \frac{c^2\gamma_0}{\gamma} = 0. \tag{4}$$

Les coniques (2), (4), ont un quatrième point commun S, autre que A, B, C. Nous appellerons ce point S, par extension, point de *Steiner* du triangle, correspondant au point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Ses coordonnées sont: $\frac{\alpha_0}{b^2-c^2}, \frac{\beta_0}{c^2-a^2}, \frac{\gamma_0}{a^2-b^2}$.

Lorsque la conique (1) *varie, en restant tangente à la droite* (u_0, v_0, w_0), *la droite* νN *passe par le point fixe* S.

En effet, l'équation de la droite νN est:

$$l(b^2-c^2)\alpha + m(c^2-a^2)\beta + n(a^2-b^2)\gamma = 0$$

qui, à cause de: $l\alpha_0 + m\beta_0 + n\gamma_0 = 0$, est vérifiée par les coordonnées du point S.

Cette propriété, peut être énoncée encore sous la forme directe:

Si le point M *décrit une conique* (Γ) *circonscrite au triangle* ABC, M′ *l'isogonal du réciproque du point* M *décrit une autre conique* (Γ′) *circonscrite au triangle* ABC *et la droite* MM′ *passe par un point fixe, le quatrième point commun aux coniques* (Γ), (Γ′).

Par exemple, *si* M *décrit la première ellipse de* Steiner, *le réciproque* M_1 *de* M *décrit la droite de l'infini, l'isogonal* M′ *de* M_1 *décrit le cercle circonscrit au triangle et la droite* MM′ *passe par le point de* Steiner *du triangle.*

II. Parmi les coniques (1) considérons seulement les paraboles. L'équation (1) étant vérifiée dans ce cas pour $u=v=w$, on a:

$$l+m+n=0. \tag{1}$$

L'équation du point I à l'infini de la parabole est:

$$(mw+nv)+(lw+nu)+(lv+mu)=0,$$

ou:

$$(m+n,u+(n+l)v+(l+m)w=0.$$

Les coordonnées de I sont dès lors, à cause de (1′): l, m, n.

Le point ν de Gergonne de la parabole a pour coordonnées $\left(\frac{1}{l},\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$, par conséquent:

Le lieu des points de Gergonne *des paraboles inscrites à un triangle est la première ellipse de* Steiner: $\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=0$, et de même, *la polaire trilinéaire du point de* Gergonne *passe par le centre de gravité du triangle.*

Le foyer F de la parabole est l'isogonal du point I, par conséquent ses coordonnées sont: $\frac{a^2}{l},\frac{b^2}{m},\frac{c^2}{n}$, et on vérifie ainsi que F décrit le cercle ABC: $a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta=0$, et que sa polaire trilinéaire passe par le point de *Lemoine. La droite* νF, *qui passe par le point de* Gergonne *de la parabole inscrite et par son foyer, passe par un point fixe, point de* Steiner *du triangle.*

Pour le démontrer, il faut prendre $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0$ dans les calculs précédents.

Les pôles des droits A $\mathcal{F}$, B $\mathcal{F}$, C $\mathcal{F}$ *par rapport à la parabole se trouvent sur les polaires de* $\mathcal{F}$ *par rapport aux angles du triangle* ABC.

En effet, l'équation du pôle de la droite A $\mathcal{F}$, par exemple, est:

$$\frac{mn}{l}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)u-\frac{n}{c^2}v+\frac{m}{b^2}w=0,$$

par conséquent les coordonnées du pôle sont:

$$\frac{mn}{l}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),\ -\frac{n}{c^2},\ \frac{m}{b^2},$$

et elles vérifient l'équation de la polaire de $\mathcal{F}$ par rapport à l'angle A:

$$\frac{m}{b^2}\beta+\frac{n}{c^2}\gamma=0.$$

Considérons maintenant le point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. L'équation:

$$(\beta_1-\gamma_1)vw+(\gamma_1-\alpha_1)wu+(\alpha_1-\beta_1)uv=0$$

représente une parabole inscrite au triangle *ABC;* cette équation étant vérifiée pour: $u\alpha_1=v\beta_1=w\gamma_1$, c'est-à-dire par les coordonnées de la droite: $\frac{\alpha}{\alpha_1}+\frac{\beta}{\beta_1}+\frac{\gamma}{\gamma_1}=0$ cette parabole est inscrite au quadrilatère complet formé par le triangle ABC et par la polaire trilinéaire du point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

L'équation précédente est aussi vérifiée pour:

$$u(k+h\alpha_1)=v(k+h\beta_1)=w(k+h\gamma_1)$$

c'est-à-dire par les coordonnées de la polaire trilinéaire d'un point arbitraire de la droite qui joint le centre de gravité G de ABC, avec le point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

Par conséquent, *si un point décrit la droite qui unit le point fixe* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *au point* G, *la polaire trilinéaire de ce point enveloppe la parabole inscrite au quadrilatère complet déterminé par le triangle* ABC *et la polaire trilinéaire du point fixe.*

Le point à l'infini de cette parabole est le point à l'infini de la réciproque de la droite $\frac{\alpha}{\alpha_1}+\frac{\beta}{\beta_1}+\frac{\gamma}{\gamma_1}=0$; le point de *Gergonne* de la parabole est le réciproque de ce point et le foyer, c'est-à-dire le point de *Miquel* du quadrilatère complet, est: $\frac{a^2}{\beta_1-\gamma_1}, \frac{b^2}{\gamma_1-\alpha_1}, \frac{c^2}{\alpha_1-\beta_1}$.

Le théorème précédent permet la construction des tangentes de la parabole inscrite au quadrilatère complet déterminé par quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4. A cet effet, on considère le triangle formé par trois des quatre droites, par exemple D_2, D_3, D_4 et l'on construit le

pôle trilinéaire M de la droite D_1 par rapport à ce triangle. Dès lors, la polaire trilinéaire de tout point de la droite MG (G le centre de gravité du triangle) est une tangente cherchée. Tous les quadrilatères complets ainsi formés ont le même point de *Miquel*, le foyer de la parabole.

III. La tangente au sommet d'une parabole inscrite au triangle ABC est la droite de *Simson* de son foyer *F* par rapport au triangle ABC; la directrice de la parabole est la parallèle menée par l'orthocentre du triangle à la tangente au sommet; l'axe de la parabole est la parallèle menée par *F* à la droite isogonale de AF par rapport à l'angle A, par exemple, ou la droite qui unit *F* au point de l'infini de la parabole. On sait que, si *F* décrit le cercle ABC, la droite de *Simson* de *F*, par rapport à ABC, enveloppe une hypocicloïde à trois points de rebroussement, *l'hypocicloïde de Steiner;* donc, l'enveloppe des tangentes aux sommets des paraboles inscrites à un triangle est *l'hypocicloïde de Steiner.* Cherchons à trouver l'équation de cette courbe.

Nous écrirons que les perpendiculaires élevées aux côtés du triangle dans les points où ils sont rencontrés par la droite:

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0,$$

sont trois droites concourantes. Les équations des trois perpendiculaires sont:

$$\left(\frac{cotgB}{v}+\frac{cotgC}{w}\right)\alpha+\frac{cotgB+cotgC}{w}\beta+\frac{cotgB+cotgC}{v}\gamma=0$$

$$\frac{cotgC+cotgA}{w}\alpha+\left(\frac{cotgC}{w}+\frac{cotgA}{u}\right)\beta+\frac{cotgC+cotgA}{u}\gamma=0$$

$$\frac{cotgA+cotgB}{v}\alpha+\frac{cotgA+cotgB}{u}\beta+\left(\frac{cotgA}{u}+\frac{cotgB}{v}\right)\gamma=0,$$

et l'équation de l'enveloppe est la suivante:

$$\begin{vmatrix} \frac{cotgB}{v}+\frac{cotgC}{w} & \frac{cotgB+cotgC}{w} & \frac{cotgB+cotgC}{v} \\ \frac{cotgC+cotgA}{w} & \frac{cotgC}{w}+\frac{cotgA}{u} & \frac{cotgC+cotgA}{u} \\ \frac{cotgA+cotgB}{v} & \frac{cotgA+cotgB}{u} & \frac{cotgA}{u}+\frac{cotgB}{v} \end{vmatrix}=0,$$

ou, tous les calculs faits et en observant que:

$$\sum cotgB\, cotgC = 1, \quad cotgA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \text{ etc, on aura:}$$

$$f(u,v,w) = a^2(v + w)(u - v)(u - w) + b^2(w + u)(v - w)(v - u) + \\ + c^2(u + v)(w - u)(w - v) = 0.$$

Cette équation représente une courbe de la troisième classe, inscrite au triangle ABC et tangente aux hauteurs du triangle. La courbe est tangente à la droite de l'infini, car l'équation $f(u, v, w)=0$, est vérifiée pour $u=v=w$; de même, les équations:

$$f'_u = 0, \; f'_v = 0, \; f'_w = 0$$

sont vérifiées pour $u=v=w$, mais les équations:

$$f''_{u2} = 0, \; f''_{v2} = 0, \; f''_{w2} = 0, \; f''_{vw} = 0, \; f''_{wu} = 0, \; f''_{uv} = 0$$

ne sont pas vérifiées pour $u=v=w$, par conséquent la droite de l'infini est une tangente double de la courbe. L'équation des points de tangence est la suivante:

$$u^2 f''_{u02} + v^2 f''_{v02} + w^2 f''_{w02} + 2vwf''_{v_0 w_0} + 2wuf''_{w_0 u_0} + 2uvf''_{u_0 v_0} = 0,$$

où l'on prendra $u_0=v_0=w_0$.

En y faisant les calculs, on obtient l'équation:

$$a^2(u - v)(u - w) + b^2(v - w)(v - u) + c^2(w - u)(w - v) = 0,$$

qui représente les points circulaires du plan. La courbe étant bitangente à la droite de l'infini aux points circulaires, est une hypocicloïde (H) à trois rebroussements, c'est *l'hypocicloïde de Steiner*.

Deux droites de *Simson* perpendiculaires se coupant sur le cercle *d'Euler* du triangle, il en résulte que c'est le cercle tritangent de la courbe (H) (ce cercle est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à la courbe).

Cherchons maintenant l'enveloppe des axes des paraboles inscrites au triangle ABC. L'équation d'une parabole inscrite au triangle étant:

$$lvw + mwu + nuv = 0,$$
$$(l + m + n = 0)$$

l'axe de la parabole joint les points $(l,m,n), \left(\frac{a^2}{l}, \frac{b^2}{m}, \frac{c^2}{n}\right)$, donc elle a pour équation:

$$\frac{1}{l}\left(\frac{b^2}{m^2} - \frac{c^2}{n^2}\right)\alpha + \frac{1}{m}\left(\frac{c^2}{n^2} - \frac{a^2}{l^2}\right)\beta + \frac{1}{n}\left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2}\right)\gamma = 0$$

Trouver l'enveloppe de cette droite, c'est trouver une relation entre les coordonnées u, v, w de cette droite, où:

$$u = k \cdot \frac{1}{l}\left(\frac{b^2}{m^2} - \frac{c^2}{n^2}\right), \; v = k \cdot \frac{1}{m}\left(\frac{c^2}{n^2} - \frac{a^2}{l^2}\right), \; w = k \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2}\right)$$

(k un coefficient de proportionalité arbitraire).

Ces trois relations sont équivalentes aux deux suivantes:

$$lu + mv + nw = 0, \quad \frac{a^2}{l}u + \frac{b^2}{m}v + \frac{c^2}{n}w = 0.$$

Il reste à éliminer l, m, n, entre ces relations et: $l+m+n=0$.. On trouve l'équation:

$$\frac{a^2u}{v-w} + \frac{b^2v}{w-u} - \frac{c^2w}{u-v} = 0,$$

$$\varphi(u,v,w) \equiv a^2u(u-v)(u-w) + b^2v(v-w)(v-u) + c^2w(w-u)(w-v) = 0.$$

L'enveloppe est donc une courbe de la troisième classe. On voit aisément que cette courbe est bitangente à la droite de l'infini aux points circulaires, par conséquent elle est une hypocicloïde (H') à trois rebroussements. Elle est tangente aux côtés du triangle anticomplémentaire et aux bissectrices intérieures et extérieures du triangle. En resumé on a ce résultat:

L'enveloppe des axes des paraboles inscrites à un triangle est une hypocicloïde à trois rebroussements, ayant le cercle circonscrit pour cercle tritangent. La courbe est tangente aux côtés du triangle anticomplémentaire et aux bissectrices intérieures et extérieures du triangle.

Si la droite (u, v, w) enveloppe la courbe (H), la droite $(v+w, w+u, u+v)$ enveloppe la courbe (H'). Les deux droits étant parallèles et les deux courbes ayant des rôles semblables pour le triangle ABC et son anticomplémentaire, il en résulte que *les deux hypocicloïdes* (H), (H') *sont homotétiques par rapport au centre de gravité du triangle ABC.*

IV. Considérons maintenant quelques paraboles remarquables inscrites à un triangle. Les équations:

$$\begin{aligned}
(\beta_0-\gamma_0)vw + (\gamma_0-\alpha_0)wu + (\alpha_0-\beta_0)uv &= 0,\\
(\beta_0-\gamma_0)vw + (\gamma_0+\alpha_0)wu - (\alpha_0+\beta_0)uv &= 0,\\
-(\beta_0+\gamma_0)vw + (\gamma_0-\alpha_0)wu + (\alpha_0+\beta_0)uv &= 0,\\
(\beta_0+\gamma_0)vw - (\gamma_0+\alpha_0)wu + (\alpha_0-\beta_0)uv &= 0,
\end{aligned}$$

représentent les quatre paraboles inscrites au triangle ABC et tan-

gentes respectivement à la polaire trilinéaire du point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, et aux polaires trilinéaires de ses associés harmoniques $(-\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $(\alpha_0, -\beta_0, \gamma_0)$, $(\alpha_0, \beta_0, -\gamma_0)$.

On a les propriétes suivantes, faciles à démontrer:

ν, ν_a, ν_b, ν_c étant les points Gergonne de ces paraboles, les droites $A\nu_a$, $B\nu_b$ $C\nu_c$ coupent les côtés BC, CA, AB en trois points situés sur la polaire trilinéaire du réciproque du complémentaire du point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Cette droite est parallèle à l'axe de la première parabole.

F_a, F_b, F_c étant les foyers des trois dernières paraboles, les droites AF_a, BF_b, CF_c coupent les côtés BC, CA, AB en trois points en ligne droite. Cette droite est la polaire trilinéaire de l'isogonal du complémentaire du point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

En particulier, si $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, on a le théorème:

Les polaires trilinéaires des points à l'infini des quatre paraboles sont les tangentes de Feuerbach *de ABC, c'est-à-dire les tangentes communes aux cercles tritangents et au cercle d'*Euler, *en leurs points de tangence.*

Considérons maintenant la parabole:

$$(\beta_0^2 - \gamma_0^2)vw + (\gamma_0^2 - \alpha_0^2)wu + (\alpha_0^2 - \beta_0^2)uv = 0.$$

Elle est inscrite au quadrilatère complet formé par le triangle ABC et par la polaire trilinéaire du point $(\alpha_0^2, \beta_0^2, \gamma_0^2)$, potentiel d'ordre 2 du point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

La polaire trilinéaire du réciproque du complémentaire du point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ est tangente à cette courbe.

En effet, l'équation de cette droite est:

$$(\beta_0 + \gamma_0)\alpha + (\gamma_0 + \alpha_0)\beta + (\alpha_0 + \beta_0)\gamma = 0.$$

Les polaires trilinaires des réciproques des complémentaires des associés harmoniques du point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ sont aussi tangentes à la parabole.

Les équations de ces droites sont:

$$\begin{aligned}(\beta_0 + \gamma_0)\alpha + (\gamma_0 - \alpha_0)\beta - (\alpha_0 - \beta_0)\gamma &= 0\\ -(\beta_0 - \gamma_0)\alpha + (\gamma_0 + \alpha_0)\beta + (\alpha_0 - \beta_0)\gamma &= 0\\ (\beta_0 - \gamma_0)\alpha - (\gamma_0 - \alpha_0)\beta + (\alpha_0 + \beta_0)\gamma &= 0\end{aligned}$$

et la proposition devient évidente.

Pour $\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 = a^2 : b^2 : c^2$, on a la parabole inscrite au triangle ABC et tangente à la droite de *Lemoine* du triangle.

Le point de Gergonne de cette parabole est le point de Steiner du triangle ABC.

La droite qui unit le foyer de cette parabole au point de Steiner *est tangente en ce point à la première ellipse de* Steiner. *Cette tangente est la polaire trilinéaire du réciproque du complémetaire du point de* Steiner.

En effet, l'équation de la tangente au point de *Steiner* à la première ellipse de *Steiner* est:

$$(b^2 - c^2)^2\alpha + (c^2 - a^2)^2\beta + (a^2 - b^2)^2\gamma = 0,$$

et le complémentaire du point de *Steiner* est: $(b^2-c^2)^2$, $(c^2-a^2)^2$, $(a^2-b^2)^2$.

V. Désignons par M_a, M_b, M_c les points où les céviennes du point M $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ recoupent le cercle circonscrit ABC, et considérons les trois paraboles (P_a), (P_b), (P_c) inscrites au triangle ABC et ayant les point M_a, M_b, M_c pour foyers. Leurs équations tangentielles sont:

$$-\left(\frac{b^2}{\beta_0}+\frac{c^2}{\gamma_0}\right)vw + \frac{b^2}{\beta_0}wu + \frac{c^2}{\gamma_0}uv = 0,$$

$$\frac{a^2}{\alpha_0}vw - \left(\frac{c^2}{\gamma_0}+\frac{a^2}{\alpha_0}\right)wu + \frac{c^2}{\gamma_0}uv = 0,$$

$$\frac{a^2}{\alpha^0}vw + \frac{b^2}{\beta_0}wu - \left(\frac{a^2}{\alpha_0}+\frac{b^2}{\beta_0}\right)uv = 0.$$

Les axes de ces paraboles sont parallèles aux céviennes isogonales de M_a A, M_b B, M_c C par rapport aux angles A, B, C du triangle et passent par M_a, M_b, M_c; les directrices de ces paraboles sont les perpendiculaires menées par l'orthocentre de ABC, le point H, sur les céviennes AM', BM', CM' (M' l'isogonal de M). Par conséquent, *les directrices de ces paraboles coupent* BC, CA, AB *en trois points situés pur une droite perpendiculaire à* HM.

Les tangentes aux sommets de ces paraboles sont les droites de *Simson* des points M_a, M_b, M_c par rapport au triangle ABC.

ν_a, ν_b, ν_c *étant les points de* Gergonne *des paraboles, les droites* $A\nu_a$, $B\nu_b$, $C\nu_c$ *concourent au réciproque de l'isogonal du point* M.

En effet, les droites $A\nu_a$, $B\nu_b$, $C\nu_c$ ont pour équations:

$$\frac{\beta}{\frac{\beta_0}{b^2}} = \frac{\gamma}{\frac{\gamma_0}{c^2}}, \quad \frac{\gamma}{\frac{\gamma_0}{c^2}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha_0}{a^2}}, \quad \frac{\alpha}{\frac{\alpha_0}{a^2}} = \frac{\beta}{\frac{\beta_0}{b^2}}.$$

Si m_a, m_b, m_c *sont les pieds des céviennes du point* M, *les tangentes que l'on peut encore mener à* (P_a), (P_a), (P_c) *ont des directions*

fixes (elles sont antiparallèles aux côtés du triangle, par rapport aux angles du triangle).

Ces tangentes ont pour équations:

$$\left(\frac{b^2}{\beta_0}+\frac{c^2}{\gamma_0}\right)\alpha+(b^2-c^2)\left(\frac{\beta}{\beta_0}-\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)=0,$$
$$\left(\frac{c^2}{\gamma_0}+\frac{a^2}{\alpha_0}\right)\beta+(c^2-a^2)\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}-\frac{\alpha}{\alpha^0}\right)=0,$$
$$\left(\frac{a^2}{\alpha_0}+\frac{b^2}{\beta_0}\right)\gamma+(a^2-b^2)\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}-\frac{\beta}{\beta_0}\right)=0.$$

Le point à l'infini de la première tangente est: $(b^2—c^2,—b^2, c^2)$, c'est-à-dire le même que celui de la tangente en A au cercle ABC. (Voici une démonstration géométrique simple de cette propriété: Désignons par U, V les points où la tangente de m_a à (P_a) coupe AC et AB. Le cercle AUV passe par le foyer M_a de la parabole, et par suite:

$$m_aU.\ m_aV = m_aB.\ m_aC,$$

ce qui démontre le théorème).

T_a, T_b, T_c *étant les points de contact des trois tangentes avec les paraboles respectives, les droites* AT_a, BT_b, CT_c *concourent dans l'isogonal du réciproque du point* M.

L'équation de T_a, par exemple, étant:

$$\frac{-(b^2—c^2)^2}{\frac{b^2}{\beta_0}+\frac{c^2}{\gamma_0}}u+b^2\beta_0.\ v+c^2\gamma_0.\ w=0,$$

les coordonnées de T_a sont les coefficients de u, v, w, etc.

Les polaires de points m_a, m_b, m_c *par rapport aux paraboles* (P_a), (P_b), (P_c) *respectivement, passent par trois points fixes situés sur les côtés du triangle anticomplémentaire. Les trois points fixes sont sur une même droite parallèle à la droite de Lemoine du triangle ABC.*

En effet, la polaire de m_a par rapport à la parabole (P_a) est:

$$(b^2+c^2)\left(\frac{b^2}{\beta_0}+\frac{c^2}{\gamma_0}\right)\alpha+(b^2-c^2)\left(\frac{b^2}{\beta_0}-\frac{c^2}{\gamma_0}\right)=0.$$

Cette droite coupe la droite: $\beta+\gamma=0$, au point fixe $(b^2—c^2, —b^2—c^2, b^2+c^2)$. Ce point et les deux autres analogues se trouvent sur la droite:

$$\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\alpha+\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\beta+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b^2}\right)\gamma=0,$$

droite parallèle à la *droite* de *Lemoine* du triangle ABC.

Considérons quelques cas particuliers.

M étant le point de *Lemoine* de ABC, les équations des paraboles (P_a), (P_b), (P_c) sont:

$$\begin{aligned} -2vw+wu+uv&=0,\\ vw-2wu+uv&=0,\\ vw+wu-2uv&=0, \end{aligned}$$

Les foyers de ces paraboles sont: $M_a\left(-\frac{a^2}{2}, b^2, c^2\right)$, $M_b\left(a^2,-\frac{b^2}{2}, c^2\right)$, $M_c\left(a^2,b^2,-\frac{c^2}{2}\right)$ et les points de *Gergonne* sont:

$$\nu_a\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right),\ \nu_b\left(1,-\frac{1}{2}, 1\right),\ \nu_c\left(1,1,-\frac{1}{2}\right),$$

c'est-à-dire les symétriques du centre de gravité de ABC par rapport aux milieux des côtés, ou les points où les médianes recoupent la première ellipse de *Steiner*.

On obtient ainsi ce beau théorème:

Les droites qui joignent les points où les médianes d'un triangle recoupent la première ellipse de Steiner, *aux points où les symédianes recoupent le cercle circonscrit au triangle, passent par le point de* Steiner *du triangle.*

Ce théorème est un cas particulier de ce théorème remarquable facile à démontrer:

Etant donnés deux points P, Q *dans le plan du triangle* ABC, *désignons par* (T_p), (T_q) *les deux coniques circonscrites au triangle* ABC *et ayant ces points pour points de* Lemoine. *Les droites qui joignent les points où les céviennes de* P *recoupent* (T_p), *aux points où les céviennes de* Q *recoupent* (T_q), *passent par le quatrième point commun aux coniques* (T_p), (T_q).

Si maintenant le point M coïncide avec le centre I du cercle inscrit, les trois paraboles (P_a), (P_b), (P_c) ont pour équations:

$$\begin{aligned} -(b+c)vw+bwu+cuv&=0,\\ avw-(c+a)wu+cuv&=0,\\ avw+bwu-(a+b)uv&=0. \end{aligned}$$

Les points de *Gergonne* ν_a, ν_b, ν_c de ces paraboles sont tels que les droites $A\nu_a$, $B\nu_b$, $C\nu_c$ concourent dans le réciproque de I; les axes des paraboles sont les bissectrices intérieures du triangle; les tangentes aux sommets sont les perpendiculaires menées par les milieux des côtés sur ces bissectrices et les directrices, les perpendiculaires menées par l'orthocentre sur les bissectrices.

On a ici le théorème suivant, analogue à un théorème antérieur.

Les droites joignant les points où les bissectrices intérieures recoupent le cercle circonscrit, aux points où les réciproques des bissectrices intérieures recoupent la première ellipse de Steiner, *passent par le point de* Steiner.

Comme dernière application, considérons le point M dans l'orthocentre du triangle ABC, ou dans le centre du cercle circonscrit. Les deux groupes de paraboles sont alors:

$$
\begin{aligned}
&-(\sin 2B+\sin 2C)vw+wu\sin 2B+uv\sin 2C=0,\\
&vw\sin 2A-(\sin 2C+\sin 2A)wu+uv\sin 2C=0,\\
&vw\sin 2A+wu\sin 2B-(\sin 2A+\sin 2B)uv=0,\\
&-(\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)vw+wu\operatorname{tg}B+uv\operatorname{tg}C=0,\\
&vw\operatorname{tg}A-(\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}A)wu+uv\operatorname{tg}C=0,\\
&vw\operatorname{tg}A+wu\operatorname{tg}B-(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)uv=0.
\end{aligned}
$$

Les axes des trois premières paraboles concourent dans l'orthocentre du triangle $M_a\,M_b\,M_c$.

Les axes des trois autres paraboles concourent dans le symétrique de l'orthocentre du triangle ABC, *par rapport au centre du cercle* ABC.

VI. Ces sont les paraboles inscrites à un triangle, que nous avons voulu présenter. Leur étude peut être reprise et approfondie dans le but de trouver des nouvelles propriétés remarquables. On peut encore considérer d'autres paraboles remarquables inscrites à un triangle, par exemple les paraboles ayant pour foyers les points M_a, M_b, M_c et telles que les droites AM_a, BM_b, CM_c coupent BC, CA, AB en trois points en ligne droite. Mais, sur ce sujet, nous reviendrons avec une autre occasion.

517 ANALYSE MATHÉMATIQUE

QUELQUES FORMULES DE MOYENNE ET QUELQUES INÉGALITÉS ENTRE LES VALEURS MOYENNES DES FONCTIONS MONOTONES

par **M. Nicolas Ciorănescu**

En partant de la formule classique de moyenne pour les intégrales multiples, par un choix convenable de la fonction à intégrer, l'auteur établit des nouvelles formules de moyenne pour les fonctions d'une seule variable, et déduit ensuite certaines inégalités entre les valeurs moyennes des fonctions monotones.

1. Dans ce Bulletin [1]) et dans d'autres publications, j'ai montré comment on peut déduire, de la formule de moyenne classique pour les intégrales multiples, des formules de moyenne nouvelles, pour les fonctions d'une seule variable.

Dans le même ordre d'idées, et en appliquant la même méthode, j'obtiens quelques nouvelles formules de moyenne, qui permettent d'obtenir facilement des inégalités entre les valeurs moyennes des fonctions monotones.

2. $f(x)$ et $g(x)$ étant des fonctions dérivables dans (a, b), et même à dérivée continue, $p(x)$ une fonction non-négative dans le même intervalle, considérons l'intégrale:

$$(1) \qquad J = \int_a^b \int_a^b p(u)p(v)[f(v) - f(u)][g(v) - g(u)]\, du\, dv$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme:

$$(1') \qquad J = \int_a^b \int_a^b p(u)p(v) \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \cdot \frac{g(v)-g(u)}{v-u} (v-u)^2\, du\, dv$$

Sous cette dernière forme, on lui applique la formule de moyenne, en remarquant que:

$$F(u,v) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \cdot \frac{g(v)-g(u)}{v-u}$$

reste une fonction continue même sur la droite $v=u$.

1) X-ème Année (1938–38) pp 27–31.

On obtient ainsi:

$$(2) \qquad J = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot \frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} \int_a^b \int_a^b (v-u)^2 p(u)p(v)\, du\, dv$$

où x_1 et x_2 sont certaines valeurs entre a et b. Mais, si l'on tient compte de la formule des acroissements finis, on peut encore écrire J sous la forme:

$$(2') \qquad J = f'(\xi_1) \cdot g'(\xi_2) \int_a^b \int_a^b (v-u)^2 p(u)p(v)\, du\, dv$$

où: $a < \xi_k < b$.

D'autre part, si dans (1) sous le signe „*somme*" on fait les calculs et on groupe les termes, on remarque que l'on peut mettre J sous la forme suivante:

$$(1'') \quad J = 2\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - 2\int_b^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx$$

En comparant (1'') et (2') on déduit la formule:

$$(3) \qquad M_p\,[f(x)g(x)] - M_p\,[f(x)].\ M_p\,[g(x)] = \frac{f'(\xi_1)g'(\xi_2)}{2P^2} \int_a^b \int_a^b (v-u)^2 p(u)p(v)\, du\, dv$$

où:
$$M_p\,[\varphi(x)] = \frac{\int_a^b p(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

et
$$P = \int_a^b p(x)dx$$

que nous voulons signaler.

3. *a)* Supposons que $f(x)$ et $g(x)$ soient dans (a, b), des fonctions monotones et de même sens. On déduit alors de (3) que:

$$(4) \qquad M_p\,[f(x)g(x)] \geq M_p\,[f(x)].\ M_p\,[g(x)]$$

On a l'inégalité contraire si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions monotones de sens opposés.

b) Faisons dans (3) $g(x) \equiv f(x)$. On obtient alors la formule suivante:

$$(5) \qquad M_p\,[f^2(x)] - M_p^2[f(x)] = \frac{f'(\xi_1)f'(\xi_2)}{2P^2} \int_a^b \int_a^b (v-u)^2 p(u)p(v)\, du\, dv$$

Si $f(x)$ est monotone dans (a, b), comme $f'(x)$ est continue il en

résulte qu'on peut remplaces $f'(\xi_1)\, f'(\xi_2)$ par $f'^2(\xi)$ où ξ est une valeur entre a et b, de sorte que l'on peut écrire:

$$(5') \quad M_p[f^2(x)] - M_p^2[f(x)] = \frac{f'^2(\xi)}{2P^2} \int_a^b \int_a^b (v-u)^2\, p(u)\, p(v)\, du\, dv$$

Cette formule permet d'évaleur la différence entre la valeur moyenne du carré d'une fonction et le carré de sa valeur moyenne, cet écart intervenant dans plus d'un problème.

c) Si dans la formule (3) on remplace $f(x)$ par $f^{\alpha}(x)$ et $g(x)$ par $f^{\beta}(x)$, α et β étant des nombres positifs, on obtient une formule plus générale que (5), qui permet d'obtenir, lorsque $f(x)$ est monotone et de signe constant dans (a, b), l'inégalité suivante:

$$(6) \quad M_p[f^{\alpha+\beta}(x)] - M_p[f^{\alpha}(x)].\, M_p[f^{\beta}(x)] \geq 0$$

En particulier, on déduit pour ces fonctions, que, quelque soit l'entier n on a:

$$(7) \quad M_p[f^n(x)] \geq M_p^n[f(x)]$$

4. Une première généralisation peut s'obtenir en considerant les intégrales:

$$(8) \quad J_{m,n} = \int_a^b \int_a^b p(u)p(v)[f(v)-f(u)]^m[g(v)-g(u)]^n\, du\, dv$$

m et n étant des entiers de même parité.

On a alors:

$$(8') \quad J_{m,n} = f'^m(\xi_1) g'^n(\xi_2) \int_a^b \int_a^b (v-u)^{m+n} p(u)p(v)\, du\, dv$$

On peut obtenir une seconde expression pour $J_{m,n}$ en développant sous les signes d'intégration et en séparant les variables. En comparant les deux expresions on obtient des formules analogues à (3).

Prenons par exemple $m=4$ $n=0$. On a alors la formule:

$$(9) \quad M_p[f^4(x)] - 4\, M_p[f(x)].\, M_p[f^3(x)] + 3.\, M_p^2[f^2(x)] = \frac{f'^4(\xi)}{2P^2} \int_a^b \int_a^b (v-u)^4 p(u)p(v)\, du\, dv$$

ce qui montre qu'on a pour toute fonction à dérivée continue:

$$(10) \quad M_p[f^4(x)] + 3\, M_p^2[f^2(x)] \geq 4\, M_p[f(x)].\, M_p[f^3(x)]$$

5. On peut généraliser d'une autre manière les formules précédentes, en considérant p. ex. l'intégrale triple:

$$(11) \qquad J = \int_a^b \int_a^b \int_a^b p(u)p(v)p(w)\ \|f\|_3 \cdot \|g\|_3\ du\ dv\ dw$$

où:
$$\|f\|_3 = \begin{vmatrix} 1 & u & f(u) \\ 1 & v & f(v) \\ 1 & w & f(w) \end{vmatrix}$$

En désignant par V_3 le déterminant Vandermonde d'ordre trois, on peut encore écrire, en supposant que f et g ont des dérivées continues du second ordre:

$$(11') \qquad J = \frac{f''(\xi_1)g''(\xi_2)}{4} \int_a^b \int_a^b \int_a^b V_3^2\ p(u)p(v)p(w)\ du\ dv\ dw$$

D'autre part on a:

$$\|f\|_3 \cdot \|g\|_3 = \Sigma(w-v)^2 f(u)g(u) - \Sigma[w^2 - (u+v)w + uv][f(u)g(v) + f(v)g(u)]$$

de sorte que l'on peut écrire:

$$(12) \qquad J = 3P_2 \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx -$$

$$6 \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)f(x)f(y)\ dx\ dy \int_a^b [s^2 - (x+y)s + xy]p(s)ds$$

où
$$P_2 = \int_a^b \int_a^b (x-y)^2 p(x)p(y)\ dx\ dy$$

En comparant les deux expressions de J on peut obtenir des formules de moyenne d'un autre type, mais nous n'insistons plus sur ce point.

518.3 NOMOGRAPHIE

QUELQUES NOMOGRAMMES À POINTS ALIGNÉS, POUR LA TECHNIQUE DE LA COMBUSTION

par **Al. Gutzu**

On établit les conditions dans lesquelles il est possible la construction d'un nomogramme représentant simultanément deux relations de la même forme, avec le nombre minimum de supports.

On indique une méthode graphique pour déterminer l'emplacement des supports, pour des cas particuliers.

Dans la deuxième partie de cet article on fait des applications pour des relations trouvées dans la technique de la combustion.

On établit quatre nomogrammes pour le pouvoir calorifique supérieur et inférieur des combustibles, deux nomogrammes pour la combustion des combustibles et deux nomogrammes pour les relations statistiques de Ms. P. Rosin et R. Fehling pour le volume de fumées et le taux d'air de combustion des combustibles.

A cette ocasion on a simplifié les relations classiques.

La première partie de cette note contient quelques remarques relatives à la construction des nomogrammes, d'un certain type, que nous avons rencontrés dans la technique de la combustion. La deuxième partie contient les nomogrammes, dans lesquels on a tenu compte des résultats obtenus dans la première partie.

I. A. La construction d'un nomogramme à points alignés, qui représente une relation à $n+1$ variables z et z_i $(i=1, 2,\ldots, n)$, qu'on peut ramener à la forme

$$f=f_1+f_2+\cdots+f_n \tag{1}$$

est étudiée particulièrement par M. D'Ocagne et R. Soreau [1].

Si on considère la variable z comme résultante des n autres z_i, on a demontré que l'échelle de f est une parallèle aux autres, menée par le barycentre des n points situés sur les n échelles de f_i, points qui sont respectivement affectés des coefficients $\frac{1}{\mu_i}$ (μ_i étant le module de l'échelle f_i).

1) *v. M. d'Ocagne* : Traité de de Nomographie. G.-Villars, 1921.
R. Soreau : Nomographie ou Traité des abaques. Doin, 1921.

Si on veut représenter simultanément les deux relations suivantes:

$$(2) \qquad \begin{aligned} a.f &= a_1.f_1 + a_2.f_2 + \cdots\cdots + a_n . f_n \\ b.g &= b_1.f_1 + b_2 f_2 + \cdots\cdots + b_n . f_n \end{aligned}$$

dans un même nomogramme, avec les mêmes échelles pour les variables z_i, il convient à maintenir explicitement les coefficients a_i, b_i. Dans ce cas il est très facile d'établir que la propriété rapellée ci-dessus se maintient, à condition de remplacer les coéfficients $\frac{1}{\mu_i}$ par $\frac{a_i}{\mu_i}$ ou $\frac{b_i}{\mu_i}$.

En général, le nomogramme qui représente la fonction f comporte $n+1$ échelles cotées et $n—2$ lignes de pivot. Si on ajoute à un tel nomogramme la fonction g, on a besoin d'une nouvelle échelle pour g et d'autres $n—2$ lignes de pivot, c'est-à-dire on utilisera, en général, $3n—2$ supports.

Dans ce qui suit nous nous proposons *d'établir un nomogramme pour les relations (2), avec un nombre minimum de supports.*

Pour réduire ce nombre de supports, qui encombre trop le nomogramme, on dispose de deux moyens: 1) faire coïncider des supports entre eux et 2) rejeter à l'infini quelques lignes de pivot.

Il faut remarquer que dans un tel nomogramme, pour bien définir un alignement, il y a au moins deux supports des échelles de f_k et f_l qui ne coïncident pas. De même on ne peut faire coïncider plus de deux échelles graduées, que si on peut faire, en même temps, coïncider les graduations de ces échelles ou si certaines échelles sont dans le prolongement des autres, car on n'a pas le moyen d'inscrire sur une droite plus de deux graduations différentes. Par contre on peut et on a même un intérêt à faire coïncider plusieurs lignes de pivot.

Considérons un système d'axes rectangulaires Oxy, Oy étant parallèle à la direction commune des supports de f; et désignerons par:

x_j, y_j, les coordonnées des origines des échelles de f_j,

x, y, les coordonnées de l'origine de l'échelle de f,

u, v, les coordonnées de l'origine de l'échelle de g,

x'_i, u'_i, les abscisses des lignes de pivot des nomogrammes de f et g,

μ, ν, les modules des échelles de f et de g.

On a les expressions suivantes:

$$x = \frac{\sum_1^n \frac{a_j}{\mu_j} x_j}{\frac{a}{\mu}} \quad , \quad y = \frac{\sum_1^n \frac{a_j}{\mu_j} y_j}{\frac{a}{\mu}} \quad , \quad \frac{a}{\mu} = \sum_1^n \frac{a_j}{\mu_j}$$

$$u = \frac{\sum_1^n \frac{b_j}{\mu_j} x_j}{\frac{b}{\nu}} \quad , \quad v = \frac{\sum_1^n \frac{b_j}{\mu_j} y_j}{\frac{b}{\nu}} \quad , \quad \frac{b}{\nu} = \sum_1^n \frac{b_j}{\mu_j} \tag{3}$$

$$x'_i = \frac{\sum_1^i \frac{a_j}{\mu_j} x_j}{\sum_1^i \frac{a_j}{\mu_j}} \quad , \quad u'_i = \frac{\sum_1^i \frac{b_j}{\mu_j} x_j}{\sum_1^i \frac{b_j}{\mu_j}}$$

Certains supports coïncident entre eux si deux ou plusieurs des abscisses des supports sont égales; c'est-à-dire si l'on a:

$$\boxed{\xi = \eta} \tag{4}$$

ou ξ et η représentent deux quelconques des quantités: x_j, x, u, x'_i, u'_i.

Si l'on veut que certaines lignes de pivot soient rejetées à l'infini, il faut et il suffit qu'on ait:

$$\boxed{\sum_1^i \frac{a_j}{\mu_j} = 0} \qquad (i \neq n) \tag{5}$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par, *relation de coïncidence,* une relation du type (4) et par, *relation d'évanouissement,* une relation du type (5).

Dans ce problème on dispose de n valeurs de x_j, qui définissent la position des supports et déterminent l'étendue de la nomogramme dans le sens de Ox, et de n valeurs de μ_j, qui déterminent l'étendue de chaque échelle, dans le sens de Oy. Une relation de coïncidence, ou une relation d'évanouissement font diminuer d'une unité le nombre des supports distincts. On peut, semble-t-il, écrire un système de $2n$ equations, telles que (4) et (5), à $2n$ inconnues x_j et μ_j, qui diminueront de $2n$ le nombre des supports.

Il n'en est pas ainsi. Supposons qu'on ait construit un nomo-

gramme avec le nombre minimum de supports. Les valeurs de x_j et de μ_j avec les quelles on a construit ce nomogramme vérifient un système d'équations telles que (4) et (5). On peut construire encore un nombre infini de tels nomogrammes, qui sont déduits du premier soit par une transformation semblable de l'axe Ox, soit par une transformation semblable de l'axe Oy, soit par une translation de la première nomogromme le long de l'axe Ox. Le système d'équations, qu'on peut écrire pour déterminer une nomogramme avec le nombre minimum de supports, ne peut pas donner des valeurs bien définies pour x_j et μ_j mais seulement les valeurs de rapports tels que $\frac{x_j - x_k}{x_l - x_k}$ et $\frac{\mu_j}{\mu_h}$. On déduit qu'au moins deux des abscisses x_j et un des modules μ_j restent arbitraires.

Le nombre minimum de supports avec lesquels on peut construire un tel nomogramme est alors n+1.

Pour construire ce nomogramme on doit chercher à établir un système compatible de *2n—3* relations telles que (4) et (5). Si on considère ce système comme un système de *2n—3* équations à *n—2* inconnues x_j, il résulte *n—1* relations de compatibilité entre les paramètres μ_j. Ces relations déterminent les modules μ_j par rapport à un qui reste arbitraire, et qui détermine l'étendue des échelles, dans le sens de Oy. Les *n—2* relations restantes, entre les inconnues x_j, auxquelles on peut ajouter toujours une relation comme $x_i = 0$, par exemple $x_n = 0$, déterminent les valeurs des abscisses x_j, par rapport à une qui reste arbitraire et qui détermine la dimension du nomogramme dans le sens de Ox.

Ces nomogrammes, réduits au plus petit nombre de supports, ne seront pas toujours, en pratique, les nomogrammes les plus favorables, car il peut arriver soit que deux échelles, qui déterminent un alignement soient trop rapprochées, soit qu'un ou plusieurs modules, μ_j soient trop petits. On devra alors renoncer à une ou plusieurs des relations des coïncidence ou d'évanouissement.

Si on juge qu'une relation entre les abscisses x_j et les modules μ_j, autre que celles de coïncidence ou d'évanouissement, apporte au nomogramme une simplification plus importante que celle qui correspond à une réduction du nombre des supprts, on écrira cette relation mais on renoncera au nombre minimum de supports.

Il reste à voir si on peut toujours écrire un système compatible à 2n—3 relations de coïncidence et d'évanouissement. Nous donnons un exemple, avec le nombre maximum de rélations d'évanouissement.

On prend les sommes partielles suivantes:

$$
\begin{array}{ll}
a'_2 . f'_2 = a_1 . f_1 + a_2 . f_2 & b'_2 . g'_2 = b_2 . f_2 + b_3 . f_3 \\
a'_3 . f'_3 = a'_2 . f'_2 + a_3 . f_3 & b'_3 . g'_3 = b'_2 . g'_2 + b_4 . f_4 \\
\vdots & \vdots \\
a'_{n-1} . f'_{n-1} = a'_{n-2} . f'_{n-2} + a_{n-1} . f_{n-1} & b'_{n-1} . g'_{n-1} = b'_{n-2} . f'_{n-2} + b_n . f_n \\
a . f = a'_{n-1} . f'_{n-1} + a_n . f_n & b . g = b'_{n-1} . g'_{n-1} + b_1 . f_1
\end{array}
\tag{6}
$$

Aux fonctions auxiliaires f'_i et g'_i correspondent dans le nomogramme, les lignes de pivot.

Si n est impair on peut écrire les $n-1$ relations d'évanouissement suivantes:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{a_1}{\mu_1} + \dfrac{a_2}{\mu_2} = 0 & \dfrac{b_2}{\mu_2} + \dfrac{b_3}{\mu_3} = 0 \\
\dfrac{a_3}{\mu_3} + \dfrac{a_4}{\mu_4} = 0 & \dfrac{b_4}{\mu_4} + \dfrac{b_5}{\mu_5} = 0 \\
\vdots & \vdots \\
\dfrac{a_{n-2}}{\mu_{n-2}} + \dfrac{a_{n-1}}{\mu_{n-1}} = 0 & \dfrac{b_{n-1}}{\mu_{n-1}} + \dfrac{b_n}{\mu_n} = 0
\end{array}
\tag{7}
$$

On rejette ainsi, à l'infini, les lignes le pivot d'ordre pair. Il reste encore $n-3$ lignes de pivot, qu'on peut chercher les faire coïncider toutes entre eux. Pour qu'il soit ainsi, on doit écrire les $n-4$ relations suivantes:

$$
x'_3 = u'_3 = x'_5 = u'_5 = \cdots\cdots = x'_i = u'_i = \cdots \quad (i = 3,5,\cdots,n-2) \tag{8}
$$

On a la possibilité de faire encore deux coïcidences; par exemple on écrit les relations:

$$
x = u \quad , \quad x_{n-1} = x_n \tag{9}
$$

Si n est pair, on peut rejeter à l'infini seulement $n-2$ lignes de pivot [1]), c'est-à-dire, on peut écrire les $n-2$ relations suivantes:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{a_1}{\mu_1} + \dfrac{a_2}{\mu_2} = 0 & \dfrac{b_2}{\mu_2} + \dfrac{b_3}{\mu_3} = 0 \\
\dfrac{a_3}{\mu_3} + \dfrac{a_4}{\mu_4} = 0 & \dfrac{b_4}{\mu_4} + \dfrac{b_5}{\mu_5} = 0 \\
\vdots & \vdots \\
\dfrac{a_{n-3}}{\mu_{n-3}} + \dfrac{a_{n-2}}{\mu_{n-2}} = 0 & \dfrac{b_{n-2}}{\mu_{n-2}} + \dfrac{b_{n-1}}{\mu_{n-1}} = 0
\end{array}
\tag{10}
$$

1) v. *R. Soreau*, op. cit.

Il reste encore $n-2$ lignes de pivot qu'on peut chercher les faire coïncider toutes entre eux. Pour qu'il soit ainsi on doit écrire les $n-3$ relations de coïncidence suivantes:

$$(11)\quad x'_3=u'_3=x'_5=u'_5=\cdots\cdots=x'_i=u'_i=\cdots \quad (i=3,5,\cdots,n-1)$$

On a la possibilité de faire encore deux coïncidences; par exemple on écrit les relations:

$$(12)\qquad x=u \quad , \quad x_n=x_1$$

Soit, par exemple, $n=3$:

$$(13)\qquad \begin{aligned} a.f &= a_1.f_1+a_2.f_2+a_3.f_3 \\ b.g &= b_1.f_1+b_2.f_2+b_3.f_3 \end{aligned}$$

Le nomogramme, qui représenterait les deux fonctions f et g, comporte, en général, cinq échelles graduées et deux lignes de pivot, c'est-à-dire sept supports. D'après ce qu'il va être dit le nombre minimum de supports est de quatre. On peut écrire trois relations de coïncidence et d'évanouissement; une seule $(n-2)$ est une relation entre les abscisses x_j des supports de f_j, les deux autres $(n-1)$ sont des relations de compatibilité, c'est-à-dire des relations entre les modules μ_j.

On écrit les deux $(n-1)$ relations d'évanouissement suivantes:

$$(14)\qquad \frac{a_1}{\mu_1}+\frac{a_2}{\mu_2}=0 \quad , \quad \frac{b_2}{\mu_2}+\frac{b_3}{\mu_3}=0 \quad ;$$

on déduit:

$$(15)\quad \mu_2=-\frac{a_2}{a_1}\mu_1\,,\ \mu_3=+\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\mu_1\,,\ \mu=\frac{a}{a_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}\mu_1\,,\ \nu=\frac{b}{b_1}\cdot\mu_1.$$

Et on peut ecrire encore, la $(n-2)$ relation de coïncidence suivante:

$$(16)\qquad x=u \quad ,$$

ou:

$$(17)\qquad \frac{\dfrac{a_1}{\mu_1}x_1+\dfrac{a_2}{\mu_2}x_2+\dfrac{a_3}{\mu_3}x_3}{\dfrac{a}{\mu}}=\frac{\dfrac{b_1}{\mu_1}x_1+\dfrac{b_2}{\mu_3}x_2+\dfrac{b_3}{\mu_3}x_3}{\dfrac{b}{\nu}}\,,$$

on déduit, avec $x_3=0$:

$$(18)\qquad \frac{x_1}{x_2}=\frac{1-\dfrac{a_1}{b_1}\cdot\left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^2\dfrac{a_3}{b_3}}{1-\dfrac{b_2}{a_2}\cdot\dfrac{a_3}{b_3}}$$

Le nomogramme est construit de cette manière, avec alignement par chevrons [1]), avec trois supports distincts pour f_1, f_2 et f_3 et avec un quatrième support qui porte deux graduations, pour f et g, c'est à dire avec le nombre minimum de supports $(n+1)$. On ne peut plus réduire le nombre des supports que si on a des relations de condition entre les coefficients a_i et b_i. On ne peut, par ex., imposer la coïncidence des supports de f_1 et f_3, que si on a la relation de condition:

$$\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_3}{b_3} \tag{19}$$

Les relations (15) sont à calculer numériquement. La relation (17) [ou (18)] est susceptible d'une construction graphique très simple. Soit un premier groupe de trois forces parallèles $\frac{a_1}{\mu_1}, \frac{a_2}{\mu_2}, \frac{a_3}{\mu_3}$ appliquées au trois points quelconques F_1, F_2, F_3 et un autre groupe de trois forces parallèles $\frac{b_1}{\mu_1}, \frac{b_3}{\mu_2}, \frac{b_3}{\mu_3}$ appliquées aux même points. Si Oy est une parallèle à toutes les forces, l'équation (17) exprime que les deux résultantes ont la même droite de support, ou que Oy, et donc toutes les forces doivent être parallèles à la droite définie par les deux points F et G. Les supports des échelles de f_1, f_2, f_3, f ou g sont ainsi bien définis par la droite FG. On peut évidemment faire une réduction ou un agrandissement de ce nomogramme à une échelle convenable.

On peut aisément démontrer que, quelqu'il soit le triangle $F_1\ F_2\ F_3$, les faisceaux des quatres parallèles menées par les points F, F_1, F_2, F_3, à la droite FG (F et G étant les deux barycentres des points F_1, F_2, F_3, affectés des coefficients constants α_i et β_i) sont semblables.

Dans le cas des équations (14) la construction graphique des points F et G est encore simplifiée. On cherche les points F' et G' sur le côté F_1F_3 d'un triangle quelconque, qui divise ce côté dans les rapports suivants:

$$\frac{F'F_1}{F'F_3} = \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \quad , \quad \frac{G'F_1}{G'F_3} = \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{a_1}{b_1} \quad , \tag{20}$$

on mène les droites F_2F' et F_2G' qui coupent respectivement la parallèle menée par F_3 à F_1F_2 et la parallèle menée par F_1 à F_3F aux points F et G. La droite FG et les parallèles menées à cette

1) v. *R. Soreau*, op. cit.

droite par les points F_1, F_2 et F_3 sont les quatre supports du monogramme.

Il est possible de transformer un tel nomogramme dans un instrument mécanique très simple à glissières, leviers articulés et curseurs, car la figure $C_1C_2C_2C'$, est toujours un parallélogramme. Cet instrument fera connaître les inconnues z et w correspondantes aux fonctions f et g par le simple arrangement des curseurs C_1, C_2 et C_3 correspondants aux valeurs données des paramètres z_1, z_2 et z_3.

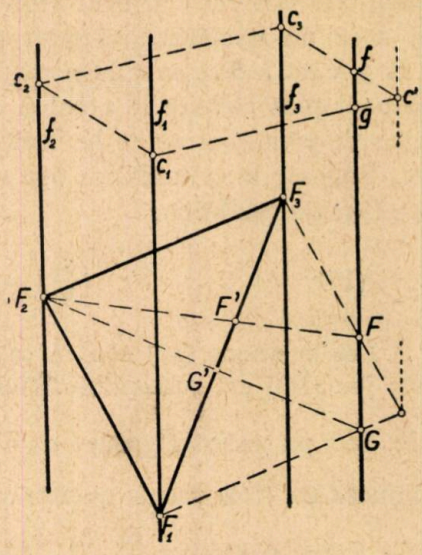


Fig. 1.

Soit maintenant, $n=4$:

$$(21)\qquad \begin{aligned} a.f &= a_1.f_1 + a_2.f_2 + a_3.f_3 + a_4.f_4 \\ b.g &= b_1.f_1 + b_2.f_2 + b_3.f_3 + b_4.f_4 \end{aligned}$$

En général le monogramme peut être construit avec six échelles graduées et quatre lignes de pivot.

On écrit les $n-2=2$ relations d'évanouissement comme dans le cas $n=3$:

$$(22)\qquad \frac{a_1}{\mu_1}+\frac{a_2}{\mu_2}=0 \qquad \frac{b_2}{\mu_2}+\frac{b_3}{\mu_3}=0$$

et les trois $\left(\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}\right)$ relations de coïncidence suivantes:

$$(23)\qquad x'_3=u'_3 \quad , \quad x=u \quad , \quad x_4=x_1$$

De ces trois dernières relations on tire d'abord une relation de compatibilité qui est: [1])

$$(24)\qquad \frac{a_4}{\mu_4}\cdot\frac{b_4}{\mu_4}=\frac{b_1}{\mu_1}\cdot\frac{a_3}{\mu_3}$$

Les relations (19) et (21) font connaître les modules, par rapport à un qui reste arbitraire; on trouve:

$$\mu_2=-\frac{a_2}{a_1}\mu_1 \ , \ \mu_3=+\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\mu_1 \ , \ \mu_4=\pm\frac{b_4}{b_1}\cdot\mu_1\cdot\sqrt{\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}\cdot\frac{a_4}{b_4}}$$

$$(25)\qquad \mu=\frac{a}{a_1}\cdot\mu_1\cdot\frac{\sqrt{\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}}}{\sqrt{\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{a_3}{b_3}}\pm\sqrt{\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{a_4}{b_4}}} \ , \ \nu=\frac{b}{b_1}\mu_1\cdot\frac{\sqrt{\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{a_4}{b_4}}}{\pm\sqrt{\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{a_3}{b_3}}+\sqrt{\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{a_4}{b_4}}}$$

1) On déduit cette relation très vite si on écrit $x_1=x_4=0$

Le système (12) est:

$$(26) \qquad x = u \quad , \quad x_4 = x_1 .$$

On peut calculer numériquement les valeurs des abscisses des divers supports, mais il est plus commode de recourir à une construction graphique tout à fait semblable à celle décrite pour $n=3$.

On prendra trois points arbitraires F_1, F_2, F_3 et on cherchera le barycentre F de ces points affectés par les coefficients $\frac{a_1}{\mu_1} + \frac{a_4}{\mu_4}, \frac{a_2}{\mu_2}, \frac{a_3}{\mu_3}$ et le barycentre G correspondant aux coefficients $\frac{b_1}{\mu_1} + \frac{b_4}{\mu_4}, \frac{b_2}{\mu_2}, \frac{b_3}{\mu_3}$. La droite FG donne la direction commune des supports, qui sont a mener par les points F, F_1, F_2 et F_3.

Pour déduire la ligne de pivot on cherchera le point F'_3 qui est le centre des forces parallèles $\frac{a_1}{\mu_1}, \frac{a_2}{\mu_2}, \frac{a_3}{\mu_3}$, c'est-à-dire on reproduira la construction de F donnée pour $n=3$. La parallèle à FG qui passe par F'_3 est la ligne de pivot.

Le nomogramme este construit de cette manière, avec alignement par chevrons, avec deux supports distincts pour f_2 et f_3 avec un support portant deux graduations pour f_1 et f_4, avec un autre support portant deux graduations pour f et g et avec une ligne de pivot, c'est-à-dire avec cinq supports, le nombre minimum de support $(n+1)$.

On peut représenter, dans un nomogramme du type décrit plus haut, aussi les relations:

$$(27) \qquad \begin{aligned} F^a &= F_1^{a1} . F_2^{a2} \ldots\ldots F_n^{an} \\ G^b &= F_1^{b1} . F_2^{b2} \ldots\ldots F_n^{bn}, \end{aligned}$$

car on peut écrire aussi:

$$(28) \qquad \begin{aligned} a \log F &= a_1 \log F_1 + a_2 \log F_2 + \ldots\ldots + a_n \log F_n \\ b \log G &= b_1 \log F_1 + b_2 \log F_2 + \ldots\ldots + b_n \log F_n \ ; \end{aligned}$$

relations qui sont de la même forme que les relations (2).

B. Les deux relations:

$$(29) \qquad f = \frac{f_1}{f_2} \quad , \quad g = \frac{f_3}{f_4}$$

peuvent être représentées, sans aucune difficulté, dans un même nomogramme en N, avec les mêmes supports, portant des graduations différentes.

Les deux graduations d'un même support ne peuvent coincider

que si les deux fonctions représentées sont semblables, c'est à dire si on a la relation:

$$(30) \qquad \frac{f_i}{f_j} = \text{constante.}$$

Si les deux nomogrammes qui représentent les deux relations (29) n'ont de commun que les supports des échelles diagonales des fonctions f et g et les autres supports sont parrallèles entre eux, la coïcidence des graduations de ces échelles de f et de g suppose que les deux fonctions f et g sont homographiques. Cette dépendance entre les fonctions f et g peut être mise en évidence si on observe que l'échelle diagonale est une échelle déduite d'une échelle de f ou de g construite sur le support de f_2, ou sur un autre parallèle à celui-ci, par une transformation homographique [1]).

Supposons qu'on a un telle dépendance entre les fonctions f et g exprimée analytiquement par la relation:

$$(31) \quad A.f.g+B.f+C.g+D=0$$

On peut alors représenter les relations (29) dans un nomogramme à quatre échelles paralèlles et une même échelle diagonale pour les deux fonctions f et g. La figure 2 montre la disposition générale d'un tel nomogramme. On trouve les relations suivantes entre les éléments géometriques du nomogramme et les coefficients de la relation (31):

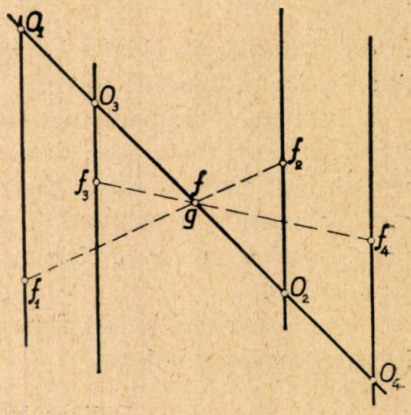


Fig. 2.

$$(32) \quad \frac{\overline{O_1O_3}}{D.\mu_1.\mu_3} = \frac{\overline{O_2O_4}}{A.\mu_2.\mu_4} = \frac{\overline{O_1O_2}}{D.\mu_1.\mu_3 + B\mu_2\mu_3} = \frac{\overline{O_4O_3}}{D\mu_1\mu_3 + C\mu_1\mu_4}$$

On peut remplacer une des relations (32) par la suivante:

$$(33) \qquad A\mu_2\mu_4 + B\mu_2\mu_3 + C\mu_1\mu_4 + D\mu_1\mu_3 = 0$$

(μ_i est le module de l'échelle de f_i)

On a fait, plus loin, une application dans le cas particulier $A=0$ et $f_2 \equiv f_4$. Dans ce cas, on trouve les valeurs de f_1 et de f_3 correspondantes à un couple de valeurs de f (ou de g) et de f_2 par un seul et même alignement. Les relations deviennent:

$$(34) \quad \overline{O_2O_4} = 0 \quad , \quad \frac{\overline{O_2O_1}}{\overline{O_2O_3}} = -\frac{C}{B}.\frac{\mu_1}{\mu_3} \quad , \quad B\frac{1}{\mu_1} + C\frac{1}{\mu_3} + D\frac{1}{\mu_2} = 0 \quad .$$

1) v. *M. Fréchet* et *H. Roullet*: Nomographie, A. Colin Paris.

Il y a lieu d'observer que si on élimine les fonctions f et g entre les relations (29) et (31) on trouve la relation à quatre variable:

$$(35) \qquad A.f_1.f_3 + B.f_1.f_4 + C.f_2.f_3 + D.f_2.f_4 = 0$$

qui, d'après ce qui à été dit, peut être représentée dans un nomogramme à quatre échelles parallèles pour les fonctions f_i et une ligne de pivot oblique.

II. 1. **Premier nomogramme pour le pouvoir calorifique supérieur et inférieur du gaz pauvre.**

On donne les relations suivantes [1]):

$$(36) \qquad \begin{aligned} Q_s &= 30{,}4\,(CO) + 95{,}3\,(CH_4) + 30{,}5\,(H_2) \\ Q_i &= 30{,}4\,(CO) + 85{,}6\,(CH_4) + 25{,}7\,(H_2) \end{aligned}$$

On a supposé que la quantité de C_2H_4 contenue dans le gaz pauvre est négligéable [2]), avec les significations suivantes:

Q_s=le pouvoir calorifique supérieur du gaz sec, en $kcal/Nm^3$,[3])

Q_i=le pouvoir calorifique inférieur du gaz sec, en $kcal/Nm^3$,

(CO)=la quantité d'oxyde de carbone contenue dans 100 Nm^3 de gaz, en Nm^3,

(H_2)=la quantité d'hydrogène contenue dans 100 Nm^3 de gaz, en Nm^3,

(CH_4)=la quantité de méthane contenue dans 100 Nm^3 de gaz, en Nm^3,

(C_2H_4)= la quantité d'éthilène contenue dans 100 Nm^3 de gaz en Nm^3,

On a construit le nomogramme qui représente les relations (36) comme une application directe des relations (13), (15) et (18). Pour les intervales de variation, j'ai consulté le manuel Hütte [4]) (v. Nomogramme no. 1).

2. **Deuxième nomogramme pour le pouvoir calorifique supérieur et inférieur du gaz pauvre.**

Si on ne néglige pas le terme correspondant à la quantité d'éthilène contenue dans le gaz on a les relations:

$$(37) \qquad \begin{aligned} Q_s &= 30{,}4\,(CO) + 30{,}5\,(H_2) + 95{,}3\,(CH_4) + 153{,}0\,(C_2H_4) \\ Q_i &= 30{,}4\,(CO) + 25{,}7\,(H_2) + 85{,}6\,(CH_4) + 143{,}5\,(C_2H_4) \end{aligned}$$

On a construit ce nomogramme comme une application directe des relations (21) et (25). Par une heureuse coïncidence on a trouvé

1) v. *A. Loschge*, Die Dampfkessel, J. Springer.
2) v. les nombreuses compositions du gaz pauvre dans les tableaux que contient l'ouvrage : *H. Trenkler*, les Gazogènes, Payot. Paris, 1926.
3) Nm^3 signifie un m^3 de gaz à 0^0C et á 760*mm* colonne de mercur.
4) v. Hütte vol. I.

aussi: $\mu = \nu$, à une cinquième décimale près. C'est à cause de la relation suivante, entre les coefficients des relations (37),

$$(38) \qquad \frac{153,0}{143,5} = \frac{30,5}{25,7} \cdot \frac{85,6}{95,3}$$

à une quatrième décimale près, relation qui est probablement le reflet d'une propriété thermo-chimique des corps: H_2, CH_4 et C_2H_4. On n'a pas pu bénéficier entièrement de cette heureuse coïncidence, en faisant coïncider aussi les origines des échelles de Q_s et de Q_i, pour représenter ces deux variables par une seule échelles, ce qui aurait été une solution élégante du problème, car le nomogramme aurait été trop développé dans le sens de Oy. On a préféré donner au nomogramme une forme plus restreinte, en renonçant à la coïncidence des granduations des deux échelles de Q_s et Q_i. (v. Nomogramme no. 2).

3. **Premier nomogramme pour le pouvoir calorifique supérieur et inférieur des combustibles solides et liquides.**

On donne les relations suivantes [1])

$$(39) \qquad \begin{aligned} Q_s &= 81.c + 25.s + 340\left(h - \frac{o}{8}\right) \\ Q_i &= 81.c + 25.s + 286\left(h - \frac{o}{8}\right) - 6\left(f + \frac{9}{8}o\right) \end{aligned}$$

avec les significations suivantes:

Q_s = le pouvoir calorifique supérieur du combustible, en *kcal/kgr.*

Q_i = le pouvoir calorifique inférieur du combustible, en *kcal/kgr.*

c = la quantité de carbone contenue dans *100 kgr.* de combustible, en *kgr.*

s = la quantité de soufre contenue dans *100 kgr.* de combustible, en *kgr.*

h = la quantité d'hydrogène contenue dans *100 kgr.* de combustible, en *kgr.*

o = la quantité d'oxygène contenue dans *100 kgr.* de combustible, en *kgr.*

f = la quantité d'eau contenue dans *100 kgr.* de combustible, en *kgr.*

Nous avons écrit les relations (39) autrement:

$$(40) \qquad \begin{aligned} Q_s &= 81\,c - 42,5\,o + 25\,s - 6\,f + 286\,h = 0 \\ Q_i &= 81\,c - 42,5\,o + 25\,s \qquad + 340\,h = 0 \end{aligned}$$

Ce système est un cas très particulier du système (2) car les trois premiers coefficients sont les mêmes dans les deux relations

1) V. *A. Loschge*, op. cit.

et la deuxième relation ne contient pas une des fonctions f_i.

Les relations d'évanouissement (7) se réduisent dans ce cas au système:

$$(41) \qquad \frac{81}{\mu_c} = \frac{42{,}5}{\mu_o} \quad , \quad \frac{25}{\mu_s} = \frac{6}{\mu_f} .$$

On ne peut pas écrire d'autres relations d'évanouissement. La seule ligne de pivot, qui doit rester à distance finie, coïncide dans les deux nomogrammes, de Q_s et de Q_i, par la nature même des coefficients. Il n'y a donc pas lieu d'écrire la relation analogue à (8), c'est à dire: $x'_3 = u'_3$.

Les relations de coïncidence analogues à (9) conduisent ici aux relations:

$$(42) \qquad x_h = x_f \quad , \quad \frac{54}{\mu_h} + \frac{6}{\mu_f} = 0$$

Et on trouve en même temps:

$$(43) \qquad \mu = \nu$$

Pour bénéficier entièrement de cette relation, j'ai aussi écrit la relation $y = v$, ce qui conduit à la relation:

$$y_h = y_f .$$

On peut écrire encore une relation entre les modules μ_i et deux relations entre les abscisses x_i, c'est-à-dire on peut faire encore trois coïncidences. Le nomogramme peut être construit avec trois supports. Il y a lieu de remarquer que la ligne de pivot ne peut coïncider qu'avec le support de l'échelle de o ou de c et que le support de l'échelle de Q_s (et de Q_i) ne peut pas coïncider avec le support de l'échelle de h (et de f) et avec la ligne de pivot. De toutes les combinaisons possibles, celles qui donnent pour μ_f la plus grande valeur sont les deux suivantes:

$$(44) \qquad x_c = x_h = x_f \quad , \quad x' = x_o \quad , \quad x = x_s$$

$$(45) \qquad x_o = x_h = x_f \quad , \quad x' = x_c \quad , \quad x = x_s$$

On peut faire ici la coïncidence de trois supports d'échelles graduées, car l'échelle de f est dans le prolongement de l'échelle de h.

Il en resulte la relation suivante:

$$(46) \qquad \frac{6}{\mu_f} = \pm \frac{286}{340} \cdot \frac{81}{\mu_c}$$

Bien qu'il résulte une trop petite valeur pour μ_f, on a construit, par curiosité, le nomogramme correspondant à la combinaison (45), car ce nomogramme offre l'aspect le plus simple (v. Nomogramme no. 3).

4. **Deuxième nomogramme pour le pouvoir calorifique supérieur et inférieur des combustibles solides et liquides.**

Dans ce deuxième nomogramme on a renoncé à restreindre le nombre des supports au minimum, pour donner au module μ_f une plus grande valeur. On a conservé seulement les relations (42), pour avoir une seule échelle pour le pouvoir calorifique Q_s *et* Q_i.

On a donné aux échelles de Q_s (et de Q_i) de *c*, de *o* et de *h* (et de *f*) le maximum d'étendue.

Il en résulte un nomogramme à cinq supports. Si l'on veut augmenter encore le module de μ_f, il faut renoncer à la coïncidence des échelles de Q_s et de Q_i (v. Nomogramme no. 4).

5. **Nomogramme pour la combustion des combustibles solides et liquides** qui donne:

a) le volume A_0, en Nm^3 pour un *kgr.* de combustible, d'air théorique nécessaire pour une combustion complète et parfaite;

b) le volume A_n en Nm^3 pour un *kgr.* de combustible, d'air réel, avec lequel s'effectue la combustion, en fonction de *n* le taux d'excès d'air;

c) le volume V_h, en Nm^3 pour un *kgr,* de combustible, des fumées humides;

d) le volume V_s, en Nm^3 pour un *kgr.* de combustible, des fumées sèches;

e) le pourcentage de bioxyde de carbone $[CO_2]$, des fumées sèches, qu'on peut relever à l'analyse des fumées avec un appareil du type *Orsat.*

On donne les relations suivantes [1]):

$$(47)\qquad \begin{aligned} A_o &= \frac{1}{21}\left[1{,}867.c + 0{,}7.s + 5{,}6\left(h - \frac{o}{8}\right)\right] Nm^3/kgr. \\ V_h &= \frac{1{,}867.c}{100} + \frac{0{,}7.s}{100} + 3{,}76.n.0{,}21\,A_o + (n-1).0{,}21\,A_o + \\ &\quad + \frac{1{,}244}{100}(9h+f)\ Nm^3/kgr. \end{aligned}$$

Nous avons donné à ces relations, et à celles qui intéressent le nomogramme, les formes suivantes, plus simples:

$$(48)\qquad \begin{aligned} 21\ A_o &= 1{,}867.c + 0{,}7.s + 5{,}6.h - 0{,}7.o \\ A_n &= n.A_o \\ 100\,V_h &= 100.A_n + 5{,}6.h + 0{,}7.o + 1{,}244.f \\ 100\,V_s &= 100.A_n - 5{,}6.h + 0{,}7.o \\ [CO_2] &= \frac{1{,}867.c}{V_s} \end{aligned}$$

1) v. *A. Loschge,* op. cit.

On a formé les sommes partielles suivantes:

(49) $X=1{,}867.c+0{,}7.s$, $Y=5{,}6.h-0{,}7.o$, $Z=5{,}6.h+0{,}7.o+1{,}244f$

et on a imposé les coïncidences suivantes:

(50) $x_o = x_f$, $x_s = x_y = x_z$, $x_h = x_{Ao}$

Il n'y pas d'autres particularité à signaler (v. Nomogramme no. 5).

6. **Nomogramme pour la combustion du gaz pauvre,** qui donne les mêmes éléments que le nomogramme (5), (les volumes A_o, A_n, V_p et V_s sont donnés ici en Nm^3 pour un Nm^3 de combustible sec). On donne les relations suivantes [1]):

$$A_o = \frac{1}{21}[0{,}5(CO)+0{,}5(H_2)+2(CH_4)+3(C_2H_4)-(O_2)]\ Nm^3/Nm^3$$

(51) $$V_h = \frac{1}{100}[(CO_2)+(CO)+(CH_4)+2(C_2H_4)]+3{,}76.n.0{,}21.A_o + \\ + \frac{1}{100}(N_2)+(n-1).0{,}21.A_o + \frac{1}{100}[(H_2)+2(CH_4)+ \\ +2(C_2H_4)]\ Nm^3/Nm^3$$

Nous avons ajouté à ces relations la relation suivante:

(52) $(CO_2)+(CO)+(H_2)+(CH_4)+(C_2H_4)+(O_2)+(N_2)=100$

et on a obtenu pour l'expression de V_h une forme *beaucoup plus simple:*

(53) $100(V_n-1)=100.A_o\,.n-0{,}5(CO+H_2)$

On a considéré que pour le gaz pauvre les quantités (C_2H_4) et (O_2) sont négligeables et les relations qui intéressent le nomogramme prennent alors les formes suivantes:

$$21\ A_o = 0{,}5(CO)+0{,}5(H_2)+2(CH_4)$$

$$A_n = n.A_o$$

(54) $$100(V_h-1)=100.A_n-0{,}5(CO+H_2)$$

$$100(V_s-1)=100.A_n-21.A_o-H_2=100A'_n-H_2$$

$$[CO_2]=\frac{(CO_2)+(CO)+(CH_4)}{V_s}$$

On a usé, pour la représentation graphique des relations

(55) $A_n = n.A_o$, $A'_n=(n-0{,}21)A_o$,

de l'observation faite dans la première partie de cette note [1]).

---

1) v. *A. Loschge,* op. cit.
1) v. page 56 les relations (34).

Par le seul alignement $n—A_0$ ont détermine les deux points correspondants sur les échelles A_n et A'_n.

On a pris les relations de coïncidence suivantes:

$$(56) \qquad x_{CH} = x_H \ , \ x_{A'n} = x_{CO} \ , \ x_{Vh} = x_{Vs}$$

et la relation d'évanouissement:

$$(57) \qquad \frac{1}{\mu_{CO}} + \frac{1}{\mu_{H_2}} = 0$$

La somme $(CO_2)+(CO)+(CH_4)$ est à calculer numériquement. (v. Nomogramme no. 6).

7. **Nomogramme pour le volume de fumée des combustibles solides et liquides.** Dans une remarquable étude, Ms. P. Rosin et R. Fehling [1]) donnent des relations statistiques entre le pouvoir calorifique d'un combustible et son volume de fumées d'une part, son air de combustion d'autre part.

Pour les combustibles solides, on donne les relations suivantes:

$$(58) \qquad V_o = \frac{0{,}89}{1000} Q_i + 1{,}65 \ , \ A_o = \frac{1{,}01}{1000} Q_i + 0{,}5$$

V_0 étant le volume de fumés, en $Nm^3/kgr.$, dans l'hypothèse d'une combustion complète et parfaite et sans excès d'air.

Pour les combustibles liquides, on donne le relations suivantes:

$$(59) \qquad V_o = \frac{1{,}11}{1000} Q_i \quad , \quad A_o = \frac{0{,}85}{1000} Q_i + 2{,}0$$

Le volume réel de fumées est donné par la relation:

$$(60) \qquad V = V_o + (n-1)A_o$$

Nous avons écrit ces relations de la manière suivante: pour les combustibles solides:

$$(61) \qquad V - 1{,}209 = 1{,}01(n - 0{,}119)\left(\frac{Q_i}{1000} + 0{,}495\right)$$

pour les combustibles liquides:

$$(62) \qquad V + 2{,}612 = 0{,}85(n + 0{,}306)\left(\frac{Q_i}{1000} + 2{,}353\right)$$

Ces relations sont de la forme:

$$f = \frac{f_1}{f_2}$$

On a construit, pour les relations (61) et (62) un nomogramme

1) v. *P. Rosin* et *R. Fehling*: Le diagramme „It" de la combustion (traduit de l'Allemand) Dunod, Paris, 1935.

avec le mêmes échelles pour les variables V et n et avec deux échelles obliques différentes pour la variable Q_i (v. Nomogramme no. 7).

8. **Nomogramme pour le volume de fumée des combustibles gazeux.** Dans la même étude citée plus haut, on donne les relations suivantes:

pour les gaz pauvres:

$$(63) \qquad V_o = \frac{0{,}725}{1000} Q_i = 1{,}0 \quad , \quad A_o = \frac{0{,}875}{1000} Q_i$$

pour les gaz riches:

$$(64) \qquad V_o = \frac{1{,}14}{1000} Q_i + 0{,}25 \quad , \quad A_o = \frac{1{,}09}{1000} Q_i - 0{,}25$$

(Dans ces relations V_0 est donné en Nm^3 pour un Nm^3 de gaz).

On a transformé ces relations comme plus haut et on a écrit:

pour les gaz pauvres:

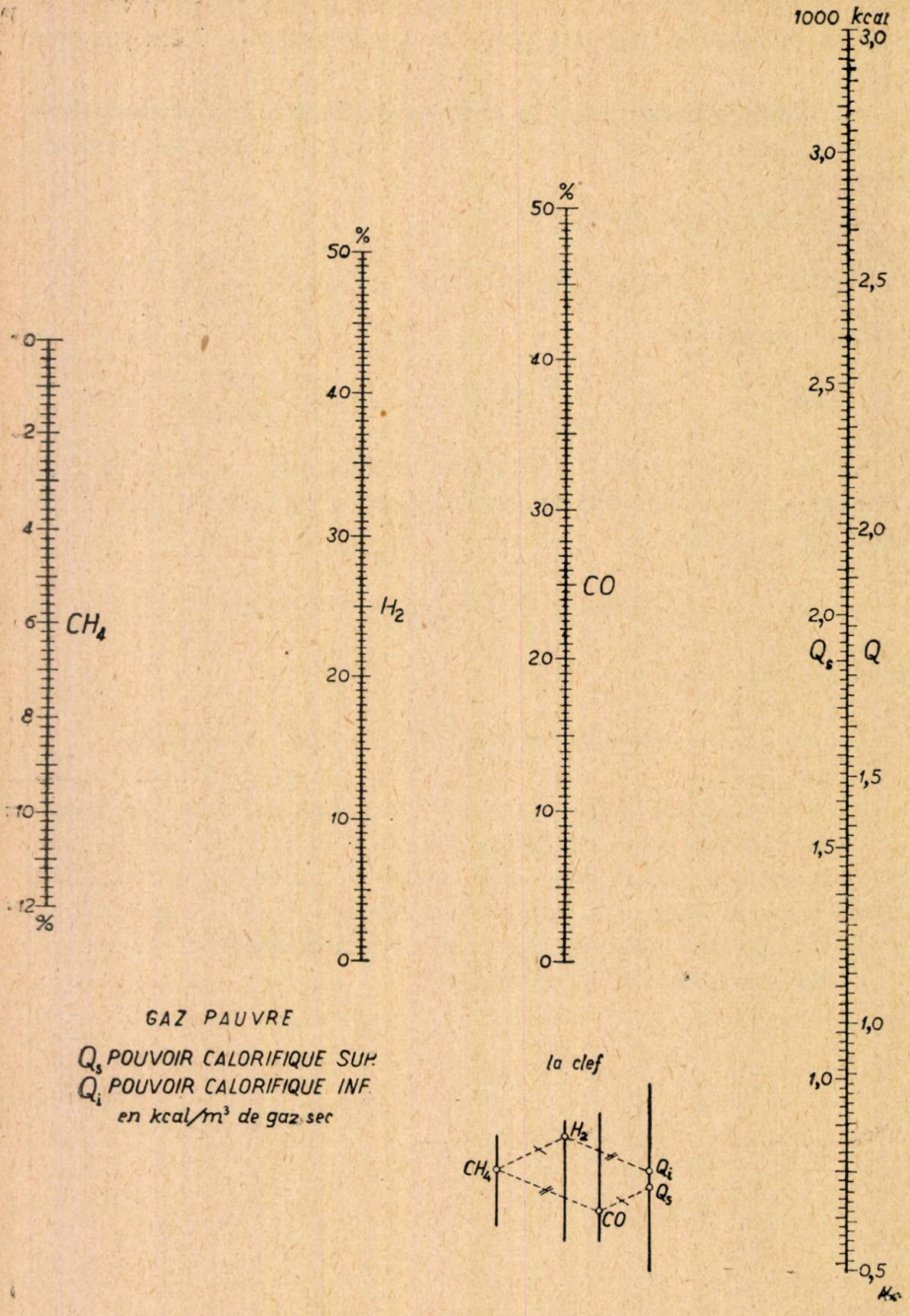
$$(65) \qquad V - 1 = 0{,}875 \frac{Q_i}{1000} \cdot (n - 0{,}171)$$

pour les gaz riches:

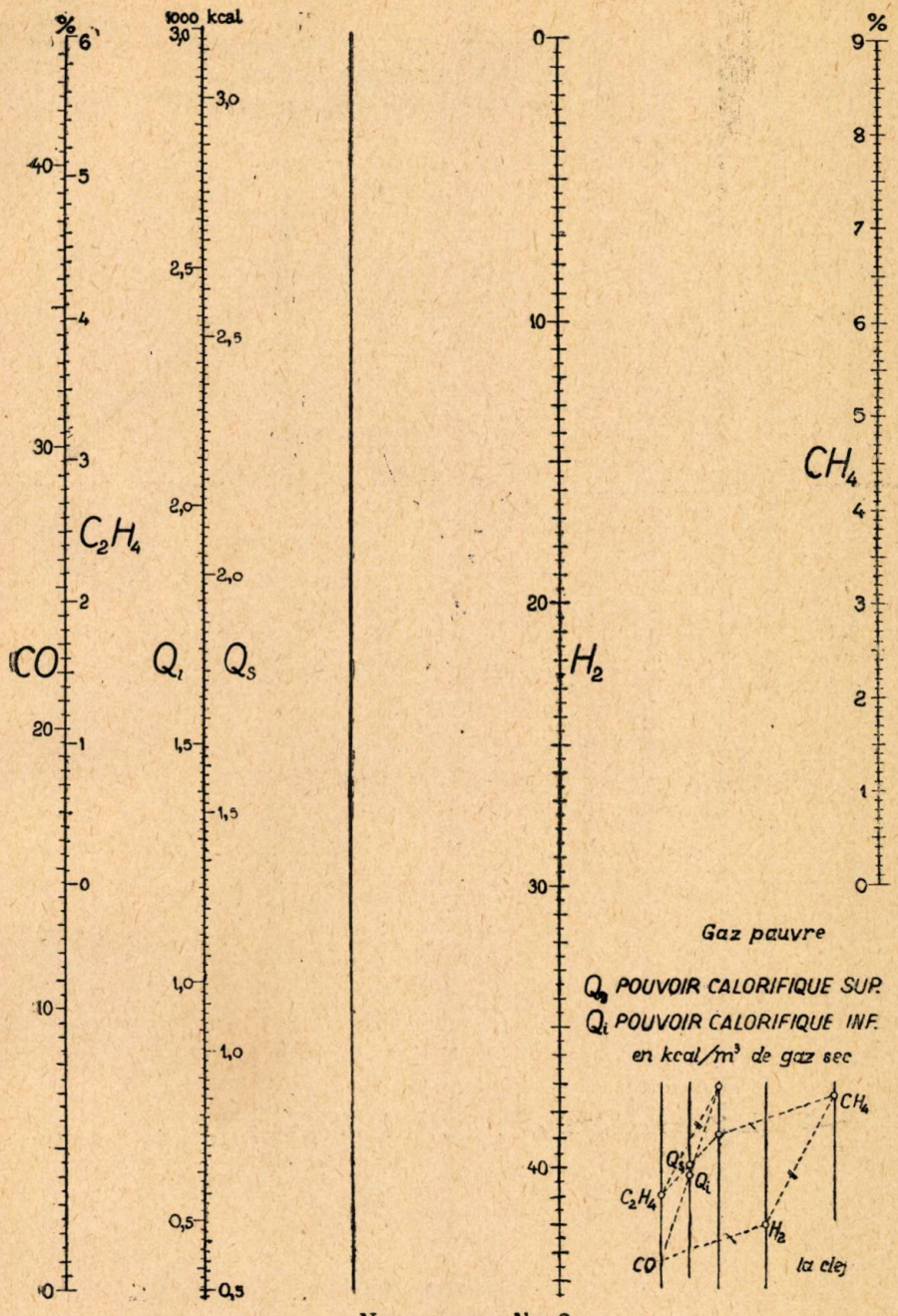
$$(66) \qquad V - 0{,}512 = 1{,}09 \left(\frac{Q_i}{1000} - 0{,}229 \right) (n + 0{,}046)$$

On a construit, pour ces deux dernières relations, un nomogramme avec les mêmes échelles pour le volume V et pour le pouvoir calorifique Q_i, et avec deux échelles (à deux supports différents) pour le taux d'excès d'air: une valable pour les gaz pauvres et l'autre valable pour les gaz riches (v. Nomogramme no. 8).

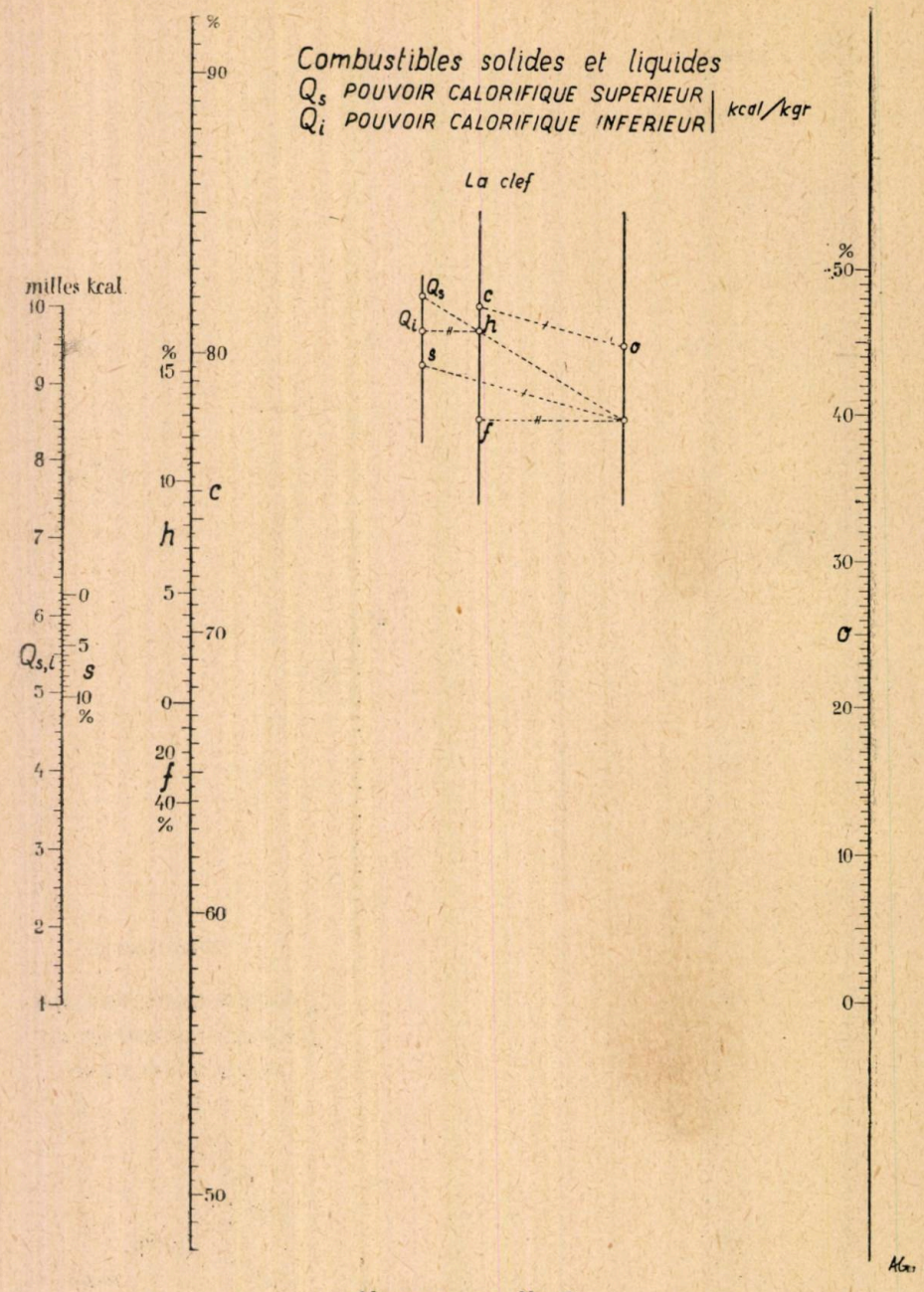
(Manuscrit reçu le 15 mars 1940).



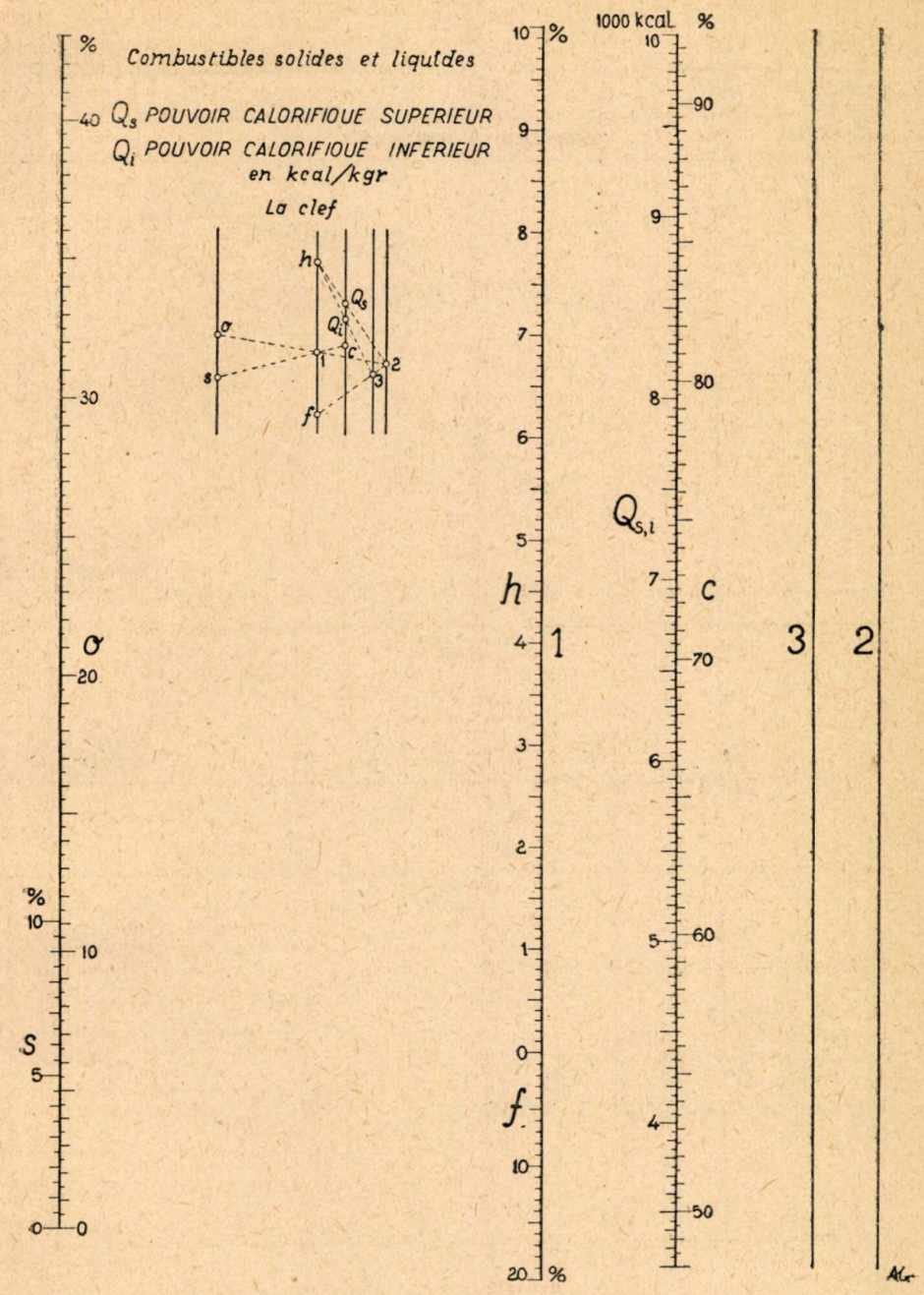
Nomogramme No. 1



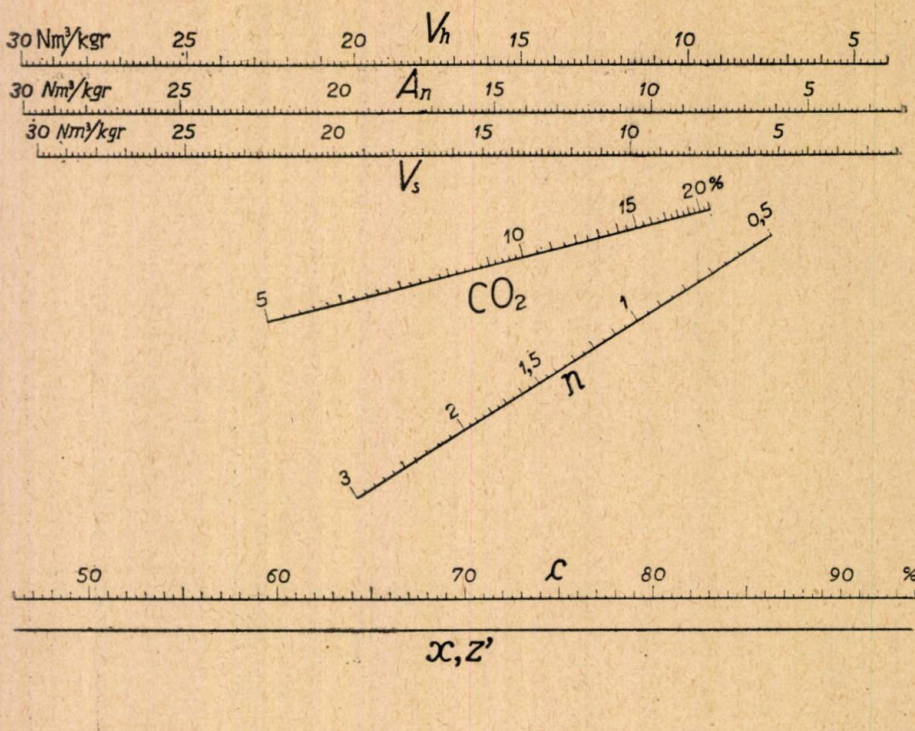
Nomogramme No. 2

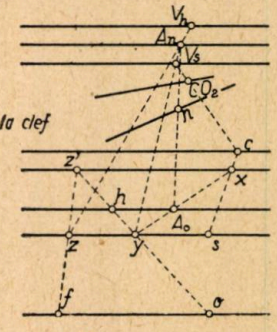


Nomogramme No. 3



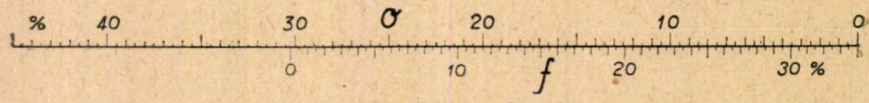
Nomogramme No. 4



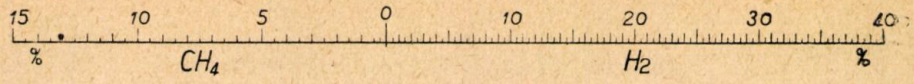


COMBUSTIBLES SOLIDES ET LIQUIDES

A_o AIR THÉORIQUE
A_n AIR RÉEL
V_s VOLUME DE FUMÉES SÈCHES
V_h VOLUME DE FUMÉES HUMIDES
CO_2 TAUX DU CO_2 DES FUMÉES SÈCHES
$n = A_n / A_o$

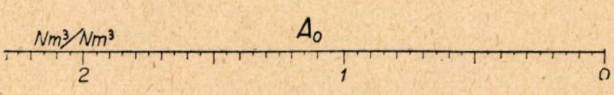


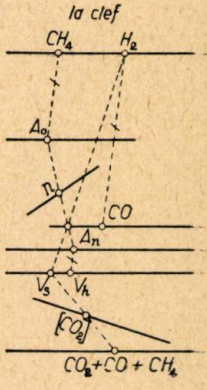
Nomogramme No. 5

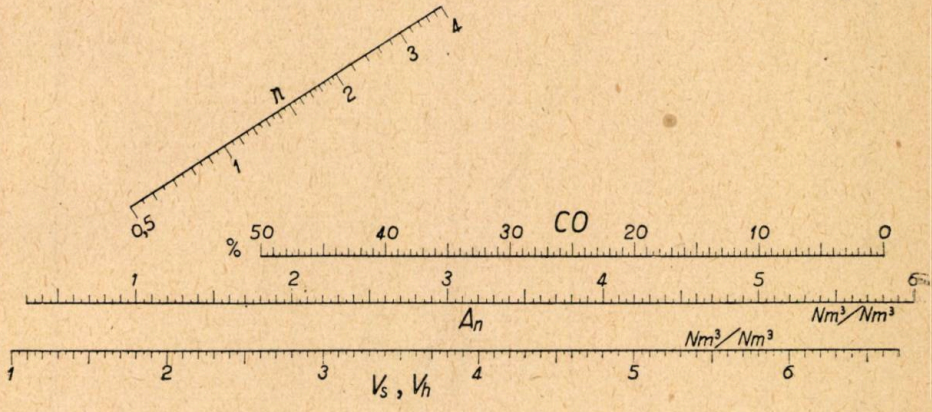


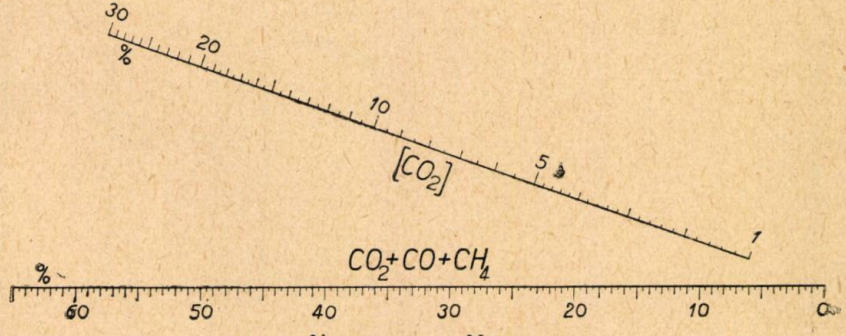
GAZ PAUVRE

A_o AIR THÉORIQUE
A_n AIR RÉEL
V_s VOLUME DE FUMÉES SÈCHES
V_h VOLUME DE FUMÉES HUMIDES
$[CO_2]$ TAUX DU CO_2 DES FUMÉES SÈCHES
$n = A_n / A_o$

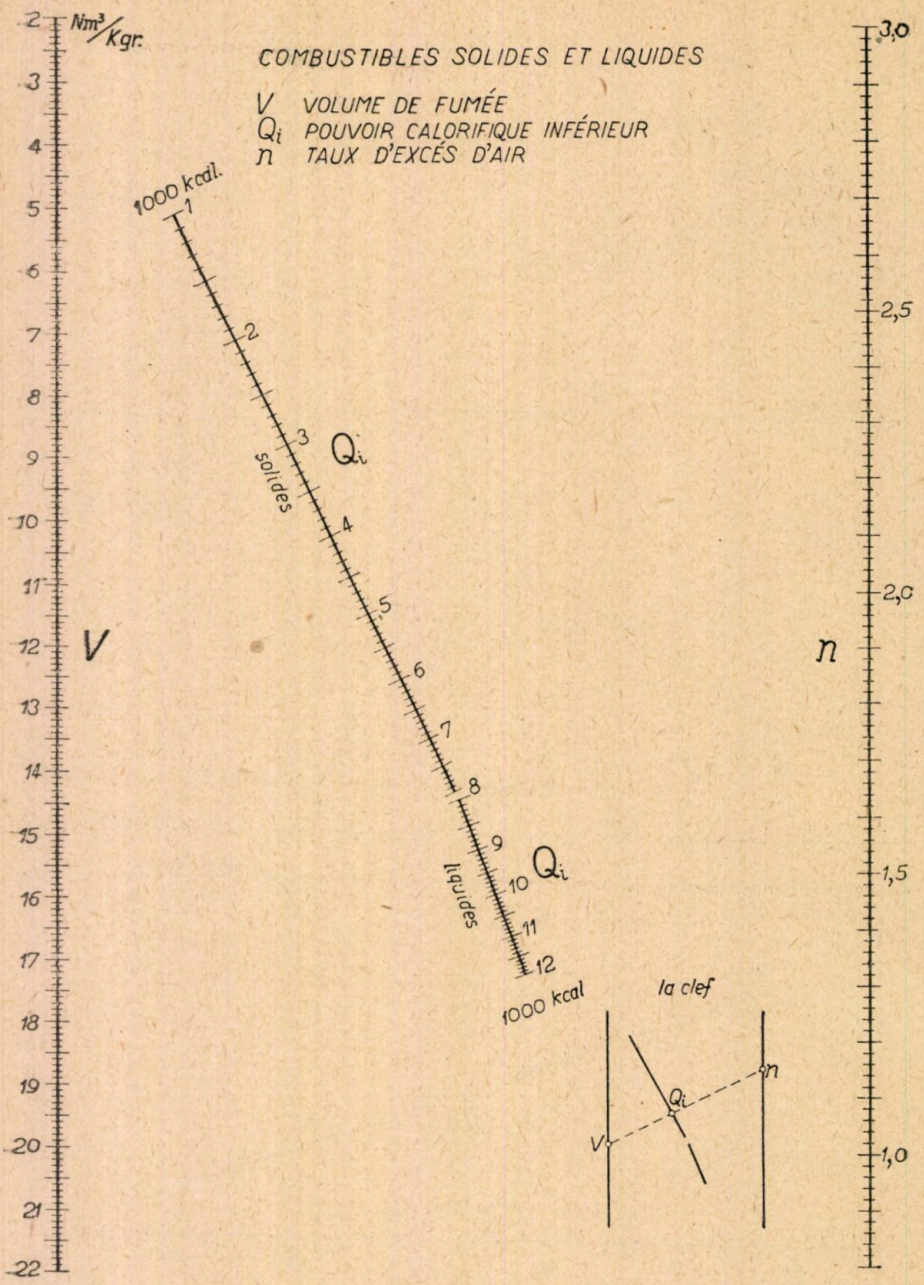




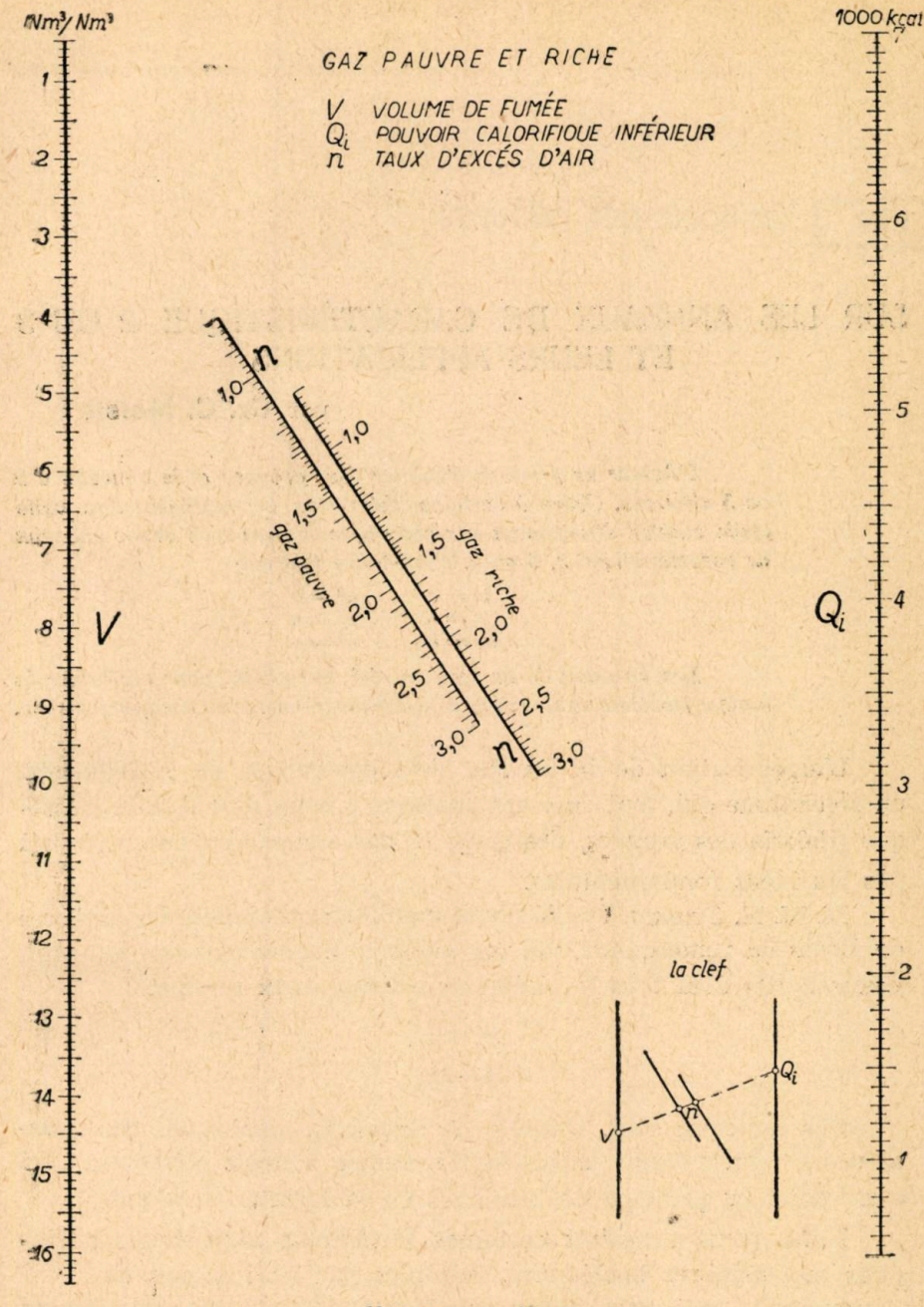




Nomogramme No. 6



Nomogramme No. 7



Nomogramme No. 8

519 THÉORIE DES GROUPES

SUR LES ANNEAUX DE CARACTÉRISTIQUE 2 OU 3 ET LEURS APPLICATIONS

par **Gr. C. Moisil**

L'Auteur se propose d'étudier les groupes et le anneaux à 2 ou 3 éléments. Grâce à certains théorèmes de représentation cette étude conduit directement aux propriétés des groupes et des anneaux de caractéristique 2, 3 ou 6, c'est-à-dire tels que

$$2a = o \qquad a^2 = a$$
$$3a = o \qquad a^3 = a$$
$$6a = o \qquad a^3 = a$$

Les anneaux de ce type ont été introduits pour algébriser la logique bivalente ou classique et la logique trivalente ou lukasiewiczienne.

L'algébrisation de la logique s'est développée en introduisant un algorithme qui, tout en étant analogue à celui de l'algèbre classique (théorie des groupes, des corps et des anneaux) n'en employait pas les idées fondamentales.

M. M. H. Stone a étudié d'une manière approfondie les algèbres de *Boole* en remarquant que ces algèbres engendrent des anneaux commutatifs dont tous les éléments satisfont aux relations:

$$x^2 = x$$
$$2x = 0$$

Ces anneaux sont, comme M. Stone l'a remarqué, des sous-anneaux d'un produit cartésien d'anneaux à deux éléments. Ceci correspond au principe de bivalence de la logique classique.

Nous avons introduit certaines formations algébriques analogues aux algèbres booléennes, inspirées par les logiques de Lukasiewicz, que nous avons appelées algèbres lukasiewicziennes Nous avons montré que ces algèbres admettent une théorie de la représentation par des produits cartésiens d'anneaux à trois éléments. Ceci correspond à un principe de trivalence.

Dans ce travail nous nous proposons de faire une étude indépendante des anneaux qui sont des produits cartésiens d'anneaux à deux et à trois éléments. Le premier chapiter expose la téorie des algèbres booléennes, telle qu'elle résulte de l'idée de M. STONE de les considérer comme des produits d'anneaux à deux éléments. [1]) Ce chapitre a un but plutôt didactique. Dans les autres chapitres sont étudiés les anneaux de caractéristique 3, correspondant aux algèbres lukasiewicziennes à centre et ceux de caractéristique 6, correspondant aux algèbres lukasiewicziennes à foyers et pôles.

Pour l'étude des logiques trivalentes nous renvoyons aux travaux de l'Ecole de Varsovie, [2]) pour les définitions et propriétés des algèbres lukasiewicziennes à nos propres recherches [3]). Nous ne faisons que citer les importants travaux de M. POST [4]).

CHAPITRE I.

THEORIE DE M. M. H. STONE POUR LES LOGIQUES BIVALENTES

1. On énonce quelquefois comme principe fondamental de la logique le principe suivant: *toute affirmation ne saurait être que vraie ou fausse et elle n'est jamais vraie et fausse à la fois.* Ce principe synthétise les deux principes: de contradiction, qui affirme qu'aucune assertion ne peut être vraie et fausse à la fois et le principe du tiers exclu, qui affirme qu'une proposition ne saurait être ni vraie ni fausse. On peut préciser ce principe en réduisant toute la logique à l'étude de deux idées: le vrai et le faux. Nous essaierons de faire une étude purement algèbrique, en partant des idées et des méthodes de l'algèbre moderne, des formations à deux éléments: O et 1, et d'appliquer les résultats obtenus à la logique, en interprétant „*1*" comme „*le vrai*" et „*0*" comme „*le faux*". C'est pousser à fond les conséquences du principe de bivalence.

---

1) *M. H. Stone.* The theory of representation for Boolean algebras. Transactions of the American mathematical Society. 40-1936-37.
M. H. Stone. Subsumption of the theory of boolean algebras to the theory of rings. Proceedings of the Nat- Acad of sciences U. S. A. 21-1935-103.
Deane Montgomery et *N. H. Mc. Coy.* Representation theory for generalised boolean rings. Duke Mathematical Journal. 3-1937-455.
2) *J. Lukasiewicz.* Philosophische Bemerkungen mehrwertige Systeme des Aussagenkalkul Comptes rendus de la Société des sciences et lettres de Varsovie. XXIII-1930-51.
J. Lukasiewicz et *A. Tarski.* Untersuchungen über den Aussagenkalkul. ibid. XXIII-1930-30.
3) *Gr. C. Moisil.* Recherches sur les logiques non-chrysippiennes. Annales scientifiques de l'Université de Jassy. XXVI-1940-431.
Gr. C. Moisil. Notes sur les logiques non-chrysippiennes I, II. ibid. XXVII-1941-86.
4) *E. L. Post.* Introduction to a general theory of elementary propositions. American journal of mathematics. 43-1921-163.

2. *Groupe à deux éléments.* Avec deux éléments *0* et *1* on peut construire deux groupes, l'un ayant 0 comme élément identique, que nous appellerons $G_{(0)}$, et aura la loi de composition désignée par „+", l'autre ayant comme élément identique *1*, qui sera appelé $G_{(1)}$, et aura la loi de composition désignée par „$\perp$". Voici ces deux lois de composition:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\perp$	0	1
0	1	0
1	0	1

Ces deux groupes sont commutatifs et tous leurs éléments sont d'ordre deux. On a donc les propriétés:

$$x+(y+z)=(x+y)+z \qquad x\perp(y\perp z)=(x\perp y)\perp z$$

(I) $x+y=y+x$ (I') $x\perp y=y\perp x$

$x+0=x$ $x\perp 1=x$

$x+x=0$ $x\perp x=1$

On peut définir „$\perp$" en fonction de „+" par

(1) $$x\perp y=x+y+1$$
$$x+y=x\perp y\perp 0$$

et on a les deux lois de permutabilité:

$$x+(y\perp z)=x\perp(y+z)=x+y+z+1$$

(II) $$x\perp(y\perp z)=x+y+z$$

Ces deux groupes sont holoédriquement isomorphes par la transformation:

$$h(x)=x+1$$

3. *Anneaux à deux éléments.* Chacun des deux groupes $G_{(0)}$ et $G_{(1)}$ peut être pris comme groupe additif d'un anneau, qui sera appelé $A_{(0)}$ et $A_{(1)}$, en déffinissant convenablement la multiplcation. Nous appellons „$\frown$" ou „$\cdot$" la multiplication en $A_{(0)}$ et „$\smile$" ou „$\times$" la multiplication en $A_{(1)}$

$\frown = \cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\smile = \times$	0	1
0	0	1
1	1	1

Ces deux anneaux sont des corps. Voici des propriétés qu'on démontre facilement:

$$x(yz)=(xy)z \qquad x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$$

(III) $xy=yx$ (III') $x\times y=y\times x$

$$x(y+z)=xy+xz \qquad x\times(y\perp z)=(x\times y)\perp(x\times z)$$

$$0\,x=0 \qquad 1\times x=1$$

$$1\,x=x \qquad 0\times x=x$$

$$x\,x=x \qquad x\times x=x$$

On a:

$$x\frown y=x\times y=t[t(x)t(y)]$$

4. Nous développerons les calculs pour l'anneau $A_{(0)}$, ceux qui leur correspond dans $A_{(1)}$ s'en déduisant par isomorphisme. Les lois de composition de $A_{(0)}$ montrent que cet anneau est holoédriquement isomorphe avec l'anneau des résidus d'entiers par rapport au module 2. Grâce à cette remarque les calculs sont remarquablement simples.

Tout polynome en A est du premier degré et peut être défini par ses valeurs prises pour les valeurs *0* et *1* des variables On a les formules:

(2) $$f(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0),$$

(3) $$f(x,y)=[f(1,1)-f(0,1)-f(1,0)+f(0,0)]xy+[f(1,0)-$$
$$-f(0,0)]x+[f(0,1)-f(0,0)]y+f(0,0)$$

Ces formules sont très utiles pour construire les fonctions intéressantes du § 5.

5. *Interprétation logique.* Nous avons interprété *0* comme le faux et *1* comme le vrai.

La fonction

x	0	1
Nx	1	0

qui fait correspondre le faux au vrai et le vrai au faux est la négation. On voit que

(4) $$Nx=x+1$$

La fonction à deux variables,

(5) $$x\frown y=xy=Kxy$$

qui a la valeur *1* ou vrai si les deux variables ont la valeur *1*, et *0* ou faux si l'une au moins des valeurs des variables est la valeur *0*, est interprétée comme correspondant à la conjonction „*et*". La fonction

$$x \smile y = x \times y = Axy$$

qui a la valeur *0* si les deux variables ont la valeur *0* et la valeur *1* si l'une au moins des variables a la valeur *1*, représente la conjonction „*ou*" au sens du latin „*vel*"

(6) $$Axy = xy + x + y$$

La fonction Cxy, qui est fausse si y est faux et x est vrai et vraie dans tous les autre cas représente l'implication „*x entraîne y*" ou „*si x alors y*". On a

(7) $$Cxy = xy + x + 1$$

La fonction Exy qui a la valeur vrai si x et y sont identiques et faux s'ils sont différents est l'équivalence

(8) $$Exy = x + y + 1 = x \mid y$$

et la fonction Rxy qui a la valeur faux si x et y sont identiques et vrai s'ils sont différents est la contradiction ou réciprocité, exprimée par la conjonction latine „*aut*"

(9) $$Rxy = x + y$$

6. Il est très facile de démontrer des formules liant ces fonctions, qui auront un intérêt logique. Voici quelques exemples:

$$NNx = x$$

car

$$NNx = (x + 1) + 1 = x + (1 + 1) = x + 0 = x;$$

$$NA(Nx,Ny) = K(x,y)$$

car

$$NA(Nx,Ny) = 1 + A(Nx,Ny) = 1 + (x + 1)(y + 1) + (x + 1) + (y + 1) =$$
$$= 1 + xy + x + y + 1 + x + 1 + y + 1 = xy$$

Ce calcul est le calcul algébrique classique, avec les deux lois $x + x = 0, xx = x$.

7. *Anneaux de caractéristique 2.* Considérons un anneau de caractéristique 2, c'est à dire un anneau avec les lois $xx = x$ et $x + x = 0$. Ce sera donc un ensembles A avec deux lois de composition „+" et

„$\cdot$“ qui est un groupe abélien dont tout élément est d'ordre 2 pour „$+$“:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} x+(y+z)&=(x+y)+z\\ x+y&=y+x\\ x+0&=x\\ x+x&=0\ , \end{aligned}$$

„$\cdot$“ étant associative, commutative et distributive, admettant un élément *1* et ayant tout élément idem-potent

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} x(yz)&=(xy)z\\ xy&=yx\\ x(y+z)&=(xy+xz)\\ x1&=x\\ x0&=0\\ xx&=x \end{aligned}$$

Par les formules (1),(4),(5),(6),(7),(8), (9) on peut, dans tout anneau de caractéristique 2, introduire certaines fonction telles que.

I. *Pour* $x \mid y = Exy$, *A est un groupe abélien ayant tout élément d'ordre 2*, ce qui veut dire que les formules (I′) sont satisfaites. Ce groupe est holoédriquement isomorphe avec le groupe additif de *A*.

II. *Pour* $x \mid y$ *et* $x \times y = Axy$, *A est un anneau de caractéristique 2*, c'est à dire: les formules (III′) sont satisfaites.

III. *Pour* $x \smile y = Axy$ *et* $x \frown y = Kxy$, *A est une lattice distributive, c'est-à-dire*

$$\text{(IV)}\qquad \begin{aligned} x\smile x&=x & x\frown x&=x\\ x\smile y&=y\smile x & x\frown y&=y\frown x\\ x\smile(y\smile z)&=(x\smile y)\smile z & x\frown(y\frown z)&=(x\frown y)\frown z\\ x\smile(y\frown z)&=(x\smile y)\frown(x\smile z) & x\frown(y\smile z)&=(x\frown y)\smile(x\frown z)\\ x\smile(x\frown y)&=x\frown(x\smile y)=x \end{aligned}$$

ayant *0* et *1* comme premier et dernier élément

$$\begin{aligned} 0\smile x&=x & 0\frown 0&=0\\ 1\smile x&=1 & 1\frown x&=x \end{aligned}$$

IV. *Pour* $x \smile y, x \frown y$, *et N,A este une algèbre de* Boole, c'est-à-

dire que c'est une lattice distributive avec une opération N telle que

$$NNx=x$$

$$(V)\qquad \begin{array}{ll} x\smile Nx=1 & x\frown Nx=0 \\ N(x\smile y)=Nx\frown Ny & N(x\frown y)=Nx\smile Ny \end{array}$$

Réciproquement, de toute algèbre de Boole ayant un premier élément 0 et un dernier élément 1 on peut construire un anneau de caractéristique 2 en posant

$$xy=x\frown y$$

$$x+y=(x\frown Ny)\smile(y\frown Nx)$$

C'est en ces deux théorèmes que consistent les fondements de la méthode de M. Stone pour l'étude des algèbres de Boole.

8. *Thèses de la logique classique.* Une fonction de plusieurs variables sera appelée un thèse de la logique classique si pour toutes les valeurs des variables la fonction a la valeur 1 ou le vrai. Voici quelques exemples:

$$Cxx$$

$$CxCNxy$$

$$CCxyCCyzCxz$$

Pour les démontrer on procède comme il suit:

$$Cxx=xx+x+1=x+x+1=1$$

$$CxCNxy=x(xy+x+y)+x+1=xy+x+xy+x+1=1$$

car

$$CNxy=(x+1)y+(x+1)+1=xy+x+y;\ \text{et ainsi de suite.}$$

9. *Produits cartésiens infinis.* Soit E un esemble quelconque et 2^E l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi(x)$, la variable x parcourant l'ensemble E et $\varphi(x)$ ayant la valeur O ou 1. *2^E est un anneau de caracteristique 2,* en posant

$$\sigma=\varphi+\psi \quad \text{si} \quad \sigma(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

$$\pi=\varphi\psi \quad \text{si} \quad \pi(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

pour tout $x\varepsilon E$.

2^E est une algèbre de Boole en posant

$$\alpha=\varphi\smile\psi \quad \text{si} \quad \alpha(x)=\varphi(x)\smile\psi(x)$$

$$\delta=\varphi\frown\psi \quad \text{si} \quad \delta(x)=\varphi(x)\frown\psi(x)$$

$$\beta=N\varphi \quad \text{si} \quad \beta(x)=N\varphi(x)$$

pour tout $x\varepsilon E$.

2^E étant donné, considérons l'ensemble $E(\varphi)$ formé par tous les $x \varepsilon E$, tels que $\varphi(x)=1$. Si E' et E'' sont donnés, on appelle $E' \frown E''$ l'intersection de E' et E'', c'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments communs à E' et E'', et $E' \smile E''$ la réunion de E' et E'', c'est-à-dire l'ensemble de tous les $x \varepsilon E$ qui appartiennent à l'un au moins des ensemble E', E''. On a

$$E(\varphi) \smile E(\psi) = E(\varphi \smile \psi)$$

$$E(\varphi) \frown E(\psi) = E(\varphi \frown \psi.)$$

10. *Théorèmes de représentation.* On a pu démontrer les théorèmes suivants:

I. *Tout anneau de caractéristique 2 est holoédriquement isomorphe à un sous-anneau d'un anneau* 2_E, E étant convenablement choisi. [1])

II. *Tout groupe dont les éléments sont d'ordre 2 est holoédriquement isomorphe avec un sous-groupe du groupe additif de* 2^E. [2])

Ces théoremes montrent que, par l'introduction d'éléments idéaux, les idées exprimées par „E" ou par „R" suffisent à la constuction de la logique, ce qui est la raison algèbrique de l'intérêt des études de MM. St. Lesniewski, [3]) J. Lukasiewicz [4]), E. Mihailescu [5]) et A. Tarski. [6])

CHAPITRE II.

LES ANNEAUX DE CARACTÉRISTIQUE 3.

11. Nous pouvons répéter les remarques du § 1, en remplaçant le principe de bivalence par un principe de trivalence:

tout énoncé peut avoir l'une des valeurs logiques: le vrai, le faux et le problématique.

---

1) *M. H. Stone.* The theory of representation for boolean algebras. Transactions of the American mathematical society. XL-1936-37.

2) *Gr. C. Moisil.* Sur la représentation des groupes abéliens infinis. I, II, III. Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine. XXIII-1941.

3) *St. Lesniewski.* Grundzüge eines neue System der Grundlagen der Mathematik. Fundamenta Mathematicae XIV-1927-I.

4) *J. Lukasiewicz.* Der Aequiwalenzkalkül. Collectanea Logica I-1939-145, cité d'après le résumé de *H. Scholz.* Jahrbuch uber die Forschritte der Mathematik. 65-1939-22.

5) *Gr. C. Moisil.* Recherches sur le principe d'identité. Annales scientifiques de l'Université de Jassy. XXIII-1937-7.

E. Mihăilescu. Recherches sur un sous système du calcul des propositions. ibid. XXIII-1937-106.

E. Mihăilescu. Recherches sur la négation et l'équivalence dans le calcul des propositions. ibid. XXIII-1937-369.

E. Mihăilescu. Recherches sur l'équivalence et la réciprocité dans le calcul des propositions. ibid. XXIV-1938-116.

E. Mihăilescu. Recherches sur l'équivalence, la réciprocité et la négation dans le calcul des propositions. Mathematica. XV-1939-81.

6) *A. Tarski.* Sur le terme primitif de la logistique. Fundamenta Mathematicad. IV-1923-196.

Le problématique peut être conçu comme étant ni vrai, ni faux, mais étant possiblement vrai et possiblement faux. Le possible est ce qui est ou vrai ou problématique, le contingent ce qui est ou faux ou problématique. Le nécessaire est ce qui est vrai, non problématique, l'impossible ce qui est faux, sans être problématique. Ces remarques seront utiles lorsque nous interpreterons les résultats algébriques. Pour l'étude purement algébrique nous considérons trois éléments, qui seront appelés *0,1,2*. Pour l'interprétation *1* sera lu *„le vrai"*, *0* sera lu *„le faux"* et *2 „le problématique"*.

12. Groupes à trois éléments. On peut former trois groupes à trois éléments qui ont les tables de multiplication suivantes:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\overline{\vee}$	0	1	2
0	1	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2

$\underline{\vee}$	0	1	2
0	2	0	1
1	0	1	2
2	1	2	0

Ces trois groupes sont abéliens et tout élément est d'ordre trois, c'est-à-dire:

$$x+(y+z)=(x+y)+z \qquad x\,\overline{\vee}\,(y\,\overline{\vee}\,z)=(x\,\overline{\vee}\,y)\,\overline{\vee}\,z$$

(VI) $x+y=y+x$ (VI') $x\,\overline{\vee}\,y=y\,\overline{\vee}\,x$

$x+0=x$ $x\,\overline{\vee}\,2=x$

$x+x+x=0$ $x\,\overline{\vee}\,x\,\overline{\vee}\,x=2$

$$x\,\underline{\vee}\,(y\,\underline{\vee}\,z)=(x\,\underline{\vee}\,y)\,\underline{\vee}\,z$$

(VI'') $x\,\underline{\vee}\,y=y\,\underline{\vee}\,x$

$x\,\underline{\vee}\,1=x$

$x\,\underline{\vee}\,x\,\underline{\vee}\,x=1$

On peut définir „$\overline{\vee}$"et„$\underline{\vee}$" en fonction de „$+$" par

$$x\,\underline{\vee}\,y=x+y+2$$
$$x\,\overline{\vee}\,y=x+y+1$$

On peut donc définir „$\underline{\vee}$" et „$+$" en fonction de „$\overline{\vee}$"et„$\overline{\vee}$" et „$\overline{+}$„ en fonction de „$\underline{\vee}$". Ces trois groupes sont holoédriquement isomorphes. Ils donnent des formules de permutabilité:

(VII)
$$x+(y\,\underline{\vee}\,z)=x\,\underline{\vee}\,(y+z)$$
$$x+(y\,\overline{\vee}\,z)=x\,\overline{\vee}\,(y+z)$$
$$x\,\underline{\vee}\,(y\,\overline{\vee}\,z)=x\,\overline{\vee}\,(y\,\underline{\vee}\,z)$$

13. Anneaux à trois éléments. Chacun de ces trois groupes engendre deux anneaux, en prenant comme unité l'un des deux autres éléments. Par exemple avec „+" et l'unité *1* on a la loi de multiplication

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Ces anneaux ont les propriétés suivantes:

$$x(yz)=(xy)z$$
$$xy=yx$$
(VIII) $$0x=0$$
$$1x=x$$
$$xxx=x \quad .$$

On emploie les abréviations suivantes:

$$2x=x+x \qquad 3x=x+x+x=0$$
$$x^2=xx \qquad x^3=xxx=x$$

Les lois de composition précédentes montrent que cet anneau est holoédriquement isomorphe à l'anneau des résidus d'entiers par rapport au module *3*. Ceci rend les calculs très faciles.

Tout polynome est du second degrré

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x,y)=ax^2y^2+b'x^2y+b''xy^2+cxy+d'x^2+d''y^2+e'x+e''y+f,$$

et est défini par les valeurs qu'il prend pour les valeurs 0, 1 2 des variables. Par exemple

(10) $$f(x)=2(x-1)(x-2)f(0)+2x(x-2)f(1)+2x(x-1)f(2).$$

14. Interprétation logique. Rappelons que 0 désigne le faux, *1* le vrai, *2* le problématique. La fonction

x	0	1	2
Nx	1	0	2

,

qui fait correspondre le vrai au faux, le faux au vrai et le problématique à lui même, est la négation

(11) $$Nx = 2x' + 1.$$

La fonction

x	0	1	2
Mx	0	1	1

qui fait corresondre au faux le faux et au vrai et au problématique le vrai, est la possibilité; Mx signifie „*x est possible*" et on a

(12) $$Mx = x^2$$

La fonction

x	0	1	2
νx	0	1	0

qui fait correspondre au vrai le vrai et au faux ou problématique le faux, représente l'idée du nécessaire: $\nu\, x$ représente „*x est nécessaire*":

(13) $$\nu x = 2x^2 + 2x.$$

La fonction

x	0	1	2
γx	1	0	1

qui est fausse si x est vraie et vraie si x est fausse ou problématique, représente la proposition „*x est contingente*"

(14) $$\gamma x = x^2 + x + 1.$$

La fonction

x	0	1	2
ηx	1	0	0

qui est vraie si x est fausse et fausse si x est vraie ou contingente, représente la proposition „*x est impossible*". On a

(15) $$\eta x = 2x^2 + 1.$$

On voit que

$$NNx=x$$

$$MMx=Mx$$

$$NMNMx=Mx$$

et

(16)
$$\nu x=NMNx$$

$$\eta x=NMx$$

$$\gamma x=MNx$$

Parmi les fonctions à deux variables nous remarquerons les deux suivantes. La conjonction Kxy des propositions x et y est fausse si l'une au moins des propositions est fausse, vraie si les deux propositions sont vraies et problématique si l'une des propositions est problématique, mais aucune n'est fausse:

K	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

Elle est donnée par

(17)
$$Kxy=x^2y^2+2xy(x+y)+2xy$$

La fonction Axy, qui est vraie si l'une au moins des variables est vraie, fausse si les deux variables sont fausses et problématique si l'une des variables est problématique, mais aucune n'est vraie, est la conjonction: Axy signifie „x *vel* y".

A	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

On a

(18)
$$Axy=2x^2y^2+xy(x+y)+xy+x+y.$$

Voici un exemple de calcul des coefficients, celui des coefficients

de Axy. On a la forme générale d'une fonction à deux variables

$$Axy = ax^2y^2 + b'x^2y + b''xy^2 + cxy + d'x^2 + d''y^2 + e'x + e''y + f.$$

Puisque $A00 = f = 0$ et puisque $Axy = Ayx$, on a $b' = b''$, $d' = d''$, $e' = e''$, donc

$$Axy = ax^2y^2 + bxy(x+y) + cxy + d(x^2+y^2) + e(x+y).$$

Si $x = 0, Axy = A0y = dy^2 + ey$, donc

$$A01 = 1 = d + e$$

$$A02 = 2 = d + 2e$$

donc $e = 1$, $d = 0$, donc

$$Axy = ax^2y^2 + bxy(x+y) + cxy + x + y.$$

Si $x = 1, A1y = ay^2 + by^2 + by + cy + y + 1$; en particulier

$$A11 = 1 = a + 2b + c + 2$$

$$A12 = 1 = a + 2c$$

et

$$A22 = 2 = a + b + c + 1,$$

donc $b = 1$, $c = 1$, $a = 2$ et

$$Axy = 2x^2y^2 + xy(x+y) + xy + x + y.$$

15. L'implication. On peut introduire plusieurs fonctions qui jouent le rôle de l'implication. La plus importante et la première en date est l'implication lukasiewiczienne

C_L	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	2	1	1

Voici quelques autres fonctions analogues

C_μ	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	1
2	0	1	1

C_ν	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	0
2	1	1	1

Par la methode expliquée au praragraphe précédent on trouve

$$C_L\,xy = x^2y^2 + 2xy\;x + y + 1) + 2x + 1$$

$$C_\mu xy = x^2y^2 + 2x^2 + 1 \tag{19}$$

$$C_\nu xy = xy(xy + x + y + 1) + x^2 + x + 1$$

Ces fonctions ne jouissent pas de la propriété importante suivante: si $x = 1$ et $Cxy = 1$, alors $y = 1$. Cette propriété est valable pour C_L et C_ν, mais pour C_μ on a: $C_\mu\,1y = 1$ entraîne $y = 1$ ou 2.

16. Formes de la logique lukasiewiczienne. Une fonction à plusieurs variables sera appelée fonction lukasiewiczienne ou forme de la logique lukasiewiczienne si elle est une superposition des fonctions C_L, C_μ, C_ν, N, M, ν, η, γ, A, K. Les formules (16) et

$$Kxy = NANxNy$$

$$C_L\,xy = NMx \smile NMNy \smile (Mx \frown MNx \frown My \frown MNy) \smile \tag{20}$$

$$\smile (x \frown Nx \frown NMy) \smile (NMNx \frown y \frown Ny)$$

$$C_\mu xy = NM \smile My$$

$$C_\nu xy = MN \smile NMNy$$

montrent que *toute fonction lukasiewiczienne est une superposition des fonctions N, M, A* (ou *K*). Les formules

$$Axy = C_L\,C_L\,xyy$$

$$Mx = C_L\,Nxx \tag{21}$$

montrent que *toute fonction lukasiewiczienne est une superposition des fonctions N et* C_L. Ce résultat, ainsi que les formules de ce paragraphe sont dus à M. J. Lukasiewicz.

On peut aussi démontrer la formule

$$f(x) = (f(0) \frown NMx) \smile (f(1) \frown NMNx) \smile (f(2) \frown Mx \frown MNx) \tag{22}$$

Elle montre que *toute fonction ne prenant pas la valeur 2 est une fonction lukasiewiczienne.* Puisque

x	0	1	2
$x \frown Nx$	0	0	2,

on voit que *toute fonction, qui ne prend la valeur 2 que si l'une des variables a la valeur 2, est une fonction lukasiewiczienne.* Les mêmes formules montrent que *toute fonction qui ne prend que les valeurs. O ou 1 est une superposition des fonctions NM, MN, NMN, M, A et K.*

Il y a des fonctions non-lukasiewicziennes, par exemple la fonction de M. SLUPECKI

x	0	1	2
Tx	2	2	2.

On peut voir que *toute fonction est une superposition des fonctions C, N, T ou A, N, M, T.*

17. *Thèses de la logique lukasiewiczienne.* Une fonction sera appelée thèse de la logique lukasiewiczienne si elle se réduit à 1. Telles sont les fonctions

$$C_L\, xC_L\, yx$$

$$C_L\, C_L\, C_L\, xNx\, x\, x$$

$$C_L\, C_L\, x\, yC_L\, C_L\, yzC_L\, xz$$

$$C_L\, C_L\, Nx\, NyC_L\, yx$$

(Ces fonctions constituent le système d'axiomes de *M. Lukasiewicz)*

18. Anneaux de caractéristique 3. Considérons un anneau qui satisfait aux axiomes (III), mais qui, au lieu des axiomes $x+x=0$ $xx=x$, *satisfait aux axiomes*

$$x+x+x=0$$

$$xxx=x$$

Un tel anneau sera appelé un anneau de caractéristique 3. Les formules (17), (18), permettent de le considérer comme une lattice:

I. *Tout anneau de caractéristique 3 est une lattice distributive* pour les lois de composition

$$x \smile y = Axy \qquad x \frown y = Kxy.$$

ayant O pour premier élément et 1 pour dernier élément,

$$x \smile 0 = x \qquad x \smile 1 = 1$$
$$x \frown 0 = 0 \qquad x \frown 1 = x$$

Pour démontrer ce théorème il suffit de montrer que

$$Axx = x \qquad Kxx = x\ ,$$

que ces fonctions sont symétriques, ce qui est visibile, qu'elles sont complètement symétriques ce qui résulte des formules suivantes

$$AxAyz = 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+xyz(xy+yz+zx+x+y+$$
$$+z+1)+xy(x+y+1)+yz(y+z+1)+zx(z+x+1)+x+y+z$$
$$KxKyz = xyz(xy+yz+zx+x+y+z+1).$$

Les lois distributives sont verifiées par un calcul assez long.

II. *La lattice définie ci-dessus est une algèbre lukasiewiczienne, avec la dualité fondamentale N et l'automorphisme fondamental M. 2 est le centre de cette algèbre.*

Ce théorème signifie que les propriété suivantes sont satisfaites:

$$N(x \smile y) = Nx \frown Ny \qquad N(x \frown y) = Nx \smile Ny$$

$$NNx = x$$

$$N0 = 1 \qquad N1 = 0$$

$$M(x \smile y) = Mx \smile My \qquad M(x \frown y) = Mx \frown My$$

(IX) $$x < Mx$$

$$MM = Mx$$

$$M2 = 1 \qquad M1 = 1$$

$$NMNMx = Mx$$

$$NMNx \smile (Mx \frown MNx) \smile NMNx = 1$$

$$x \frown Nx = Mx \frown Nx$$

$$N2 = 2$$

19. *Produits cartésiens infinis.* Soit E un ensemble et 3^E l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi(x)$, la variable x parcourant l'ensemble E et la fonction $\varphi(x)$ ayant les valeurs $0, 1, 2$. *3^E est une algèbre lukasiewiczienne et un anneau de caractéristique 3,* en posant:

$$\pi = \varphi\psi \quad \text{si} \quad \pi(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

$$\sigma = \varphi + \psi \quad \text{si} \quad \sigma(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

$$\alpha = \varphi \smile \psi \quad \text{si} \quad \alpha(x) = \varphi(x) \smile \psi(x)$$

$$\delta = \varphi \frown \psi \quad \text{si} \quad \delta(x) = \varphi(x) \frown \psi(x)$$

$$\beta = N\varphi \quad \text{si} \quad \beta(x) = N\varphi(x)$$

$$\mu = M\varphi \quad \text{si} \quad \mu(x) = M\varphi(x) \ ,$$

pour tout $x \in E$.

20. *Théorèmes de représentation.* On a pu démontrer les théorèmes suivants.

I. *Tout anneau de caractéristique 3 est un sous-anneau d'un 3^E* [1].

1) *Deane Montgomerry* et *N. H. Mc. Coy.* A representation theory for generalised boolean rings. Duke mathematical journal. 3-1938-455.

II. *Tout groupe abélien dont tous les éléments ont l'ordre 3 est un sous-groupe du groupe additif de* $3^{L\ 2)}$.

III. *Toute algèbre lukasiewiczienne centrée est une sous-algèbre lukasiewiczienne de* $3^{L\ 3)}$.

CHAPITRE III.

LES ANNEAUX DE CARACTERISTIQUE 6.

21. Produits cartésiens d'anneaux de caractéristique 2 et 3. Soit A_{II} un anneau de caractéristique 2 et A_{III} un anneau de caractéristique 3. Soit A l'ensemble des couples

$$a=(a'',a'''),$$

où $a''\varepsilon A_{II}$, $a'''\varepsilon A_{III}$ avec les lois de compostion

$$(a'',a''')+(b'',b''')=(a''+b'',a'''+b'''),$$

$$(a'',a''').(b'',b''')=(a''.b'',a'''.b''').$$

On voit que c'est un anneau avec les propriétés:

$$x^3=x$$

$$6x=0.$$

Un tel anneau sera appelé un anneau de caractéristique 6, lorsqu'il n'est pas de caractéristique 2 ni 3.

Réciproquement *tout anneau de caractéristique 6 est le produit cartésien de deux anneaux, l'un de caractéristique 2, l'autre de caractéristique 3.* Soit A un anneau de caractéristique 6, $a\varepsilon A$ et

$$a''=3a$$

$$a'''=4a$$

On a

$$2a''=0$$

$$3a'''=0$$

et

$$a=a''+a'''.$$

---

2) *Gr. C. Moisil.* Sur les groupes abéliens. III. Bulletin de la section scientifique de l'Académie roumaine.

3) *Gr. C. Moisil.* Notes sur les logiques non-chrysippiennes. Annales scientifiques de l'Université de Jassy.

Si:

$$3a=0$$

alors $a=a'''=4a=2x$, *donc*

$$a\equiv 0 \pmod 2$$

et réciproquement cette condition est suffisante pour que $3a=O$. Si

$$2a=0$$

alors $a=a''=3a$, donc

$$a\equiv 0 \pmod 3$$

et réciproquement cette condition suffit pour que $2a=O$. Si

$$a''=b''$$

alors

$$a \equiv b \pmod 2$$

et réciproquement; si

$$a'''=b'''$$

alors

$$a \equiv b \pmod 3$$

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$a=b$$

est

$$a''=b''$$

$$a'''=b'''$$

En effet cette condition est nécessaire; elle conduit à

$$3a=3b$$

$$4a=4b$$

donc à $a=b$

On a

$$(a+b)''=a''+b'' \qquad (a+b)'''=a'''+b'''$$

$$(ab)''=a''b'' \qquad (ab)'''=a'''b'''.$$

Si on donne c'' et c''' avec

$$2c'' = 0$$

$$3c''' = 0$$

il existe un z tel que

$$z \equiv c'' \pmod 2$$

$$z \equiv c''' \pmod 3$$

il suffit de prendre

$$z = 3c'' + 4c''' \pmod 6$$

Ces remarques montrent que A est le produit cartésien de A_{II} et A_{III}, où A_{II} est l'anneau des résidus de A par rapport au module 3 et A_{III} est l'anneau des résidus de A par rapport à 2.

22. Le théorème précédent montre que si on donne deux fonctions $\varphi_{II}(x)$, définie dans A_{II} et $\varphi_{III}(x)$, définie dans A_{III}, il existe une fonction φ en A, telle que

$$\varphi(x) \equiv \varphi_{II}(x) \qquad (\text{mod. } 2, x^2 - x)$$

$$\varphi(x) \equiv \varphi_{III}(x) \qquad (\text{mod. } 3). \ ;$$

Voici quelques exemples. Les fonctions A, K, N, définies dans les anneaux de caractéristique 6 sont congruentes avec les fonctions qui portent le même nom, définies dans les chapitres I et II pour les anneaux de caractéristiques 2, 3.

(23) $$Axy = 2x^2y^2 + xy(x+y) + xy + x + y$$

(24) $$Kxy = x^2y^2 + 2xy(x+y) + 2xy$$

(25) $$Nx = 5x + 1$$

(26) $$Mx = x^2$$

(dans les anneaux de caractéristique 2, $Mx = x$)

23. On peut montrer par des calculs immédiats, qui d'ailleurs se réduisent à ceux déjà faits, que

I. *Tout anneau de caractéristique 6 est une algèbre lukasiewiczienne pour les opérations*

$$x \smile y = Axy \qquad\qquad x \frown y = Kxy$$

la dualité fondamentale N *et l'automorphisme fondamental* M.

Remarquons que

$$2 \equiv 4 \equiv 0 \qquad 3 \equiv 5 \equiv 1 \pmod 2$$

$$2 \equiv 5 \pmod 3 \qquad 4 \equiv 1 \pmod 3 \qquad 3 \equiv 0 \pmod 3$$

on conclut que

II. *2 et 5 sont des foyers, 3 et 4 sont des pôles.*

Les algèbres lukasiewicziennes obtenues des anneaux de caractéristiques 6 sont donc particulières, car il existe des algèbres lukasiewicziennes sans foyers ni pôles. [1])

24. Montrons que les conditions.

$$Ax\ Nx=1$$

$$Kx\ Nx=0$$

$$x=NMNx,$$

$$x=Mx$$

sont équivalentes. Les deux premières conduisent à $2x^2=2x$ et les deux dernières à $x^2=x$. Le dernière équation entraîne la première, mais l'assertion réciproque est aussi valable. En effet pour tout x, $2(x^2-x)\equiv 0$ (mod. 2). Si pour x_0 on a aussi $2(x_0^2-x_0)\equiv 0$ (mod. 3), alors on a $x_0^2-x_0\equiv 0$ (mod. 3) donc $x_0^2-x=0$, car pour tout x, $x^2-x\equiv 0$ (mod. 2). Les solutions de l'équation

$$x^2-x=0$$

sont les éléments chrysippiens de l'algèbre lukasiewiczienne.

Cette démonstration montre qu'on a toujours

$$3x(x-1)=0$$

car si $\alpha(x)=3(x^2-x)$, *on a* $\alpha_{II}(x)=0$ et $\alpha_{III}(x)=0$.

Un élément qui satisfait au système

$$x^2=x$$

$$2x=2$$

est un élément strictement chrysippien. Il est facile de voir que si s est strictement chrysippien, Asx est chrysippien et réciproquement.

25. En posant $w=5$ on voit que

(1) $$w^2=1$$

(2) $$A(MNw, My)=A(MNw, NMNy)$$

la relation (2) étant vraie pour tout y. Ces formules peuvent être facilement vérifiées.

---

1) *Gr. C. Moisil.* Sur les algèbres lukasiewicziennes complètes. A paraître dans les Annales de Jassy).

Réciproquement si les équations (1) et (2) sont satisfaites, on doit avoir

$$2(w+1)=0$$

comme on le constate facilement, donc

$$w+1=3t$$

ou

$$w=5+3t$$

et $w^2=1$ donne

$$3t^2=0$$

donc $t=2s$ et

$$w=5.$$

CHAPITRE IV.

ALGEBRES LUKASIEWICZIENNES TRIVALENTES CENTREES

26. Soit L une algèbre lukasiewiczienne centrée et c le centre

$$c=Nc$$

donc

$$Mc=v \qquad NMNc=f$$

Il est facile de montrer que

$$x=NMNx\smile(c\frown Mx\frown MNx)$$

$$x=Mx\frown(c\smile NMx\smile NMNx).$$

En effet pour démontrer la deuxième formule il suffit d'appliquer N à la première. Pour démontrer la première formule on doit remarquer que :

$$M[NMNx\smile(c\frown Mx\frown MNx)]=NMNx\smile(Mx\frown MNx)=Mx$$

$$NMN[NMNx\smile(c\frown Mx\frown MNx)]=NMNx$$

et appliquer le principe de détermination [1].

27. Introduisons les deux lois de composition :

$$x+y=(NMx\frown NMNy)\smile(NMy\frown NMNx)\smile(Mx\frown My\frown MNx\frown MNy)\smile$$
$$\left\{c\frown[(NMx\frown My\frown MNy)\smile(NMy\frown Mx\frown MNx)\smile(NMNx\frown NMNy)]\right\}$$

$$x.y=(NMNx\frown NMNy)\smile(Mx\frown My\frown MNx\frown MNy)\smile$$
$$\left\{c\frown[(NMNx\frown My\frown MNy)\smile(NMNy\frown Mx\frown MNx)]\right\}$$

1) Voir nos *Recherches* p. 449 et nos *Notes* p. 89.

Ces deux lois de composition sont commutatives, comme on le voit immédiatement. Puisque

$$x \,.\, f = f$$
$$x + f = x$$
$$x \,.\, v = x$$
$$v + v = c$$

il convient de changer les notations et de poser

$$0 = f$$
$$1 = v$$
$$2 = c$$

On voit que ces trois éléments se composent comme il suit :

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	2	1

On voit que

$$2x = x + x = (Mx \frown MNx) \smile (c \frown NMNx)$$
$$x\,x = Mx$$

et que

$$x + (x + x) = (x + x) + x = 0$$
$$x(x\,x) = (x\,x)x = x$$

Il convient d'écrire

$$3x = x + (x + x)$$
$$x^3 = x(x\,x)$$

donc

$$3x = 0$$
$$x^3 = x.$$

28. On peut montrer que „+“ et „·“ *sont associatives* et que „·“ *est distributive pour* „+“, en effectuant des calculs très longs mais sans difficultés théoriques.

On voit donc que : *L est un anneau commutatif, à élément identique* ($1 = v$), *de caractéristique 3 :*

$$3x = 0$$

$$x^3 = x.$$

C'est donc un anneau du type étudié au chapitre II.

CHAPITRE V.

ALGEBRES LUKASIEWICZIENNES TRIVALENTES AXEES

29. Soit L une algèbre lukasiewiczienne axée, c'est-à-dire telle qu'elle contienne un élément w avec :

$$NMNw = f$$

$$Mw \smile NMNx > Mx \ ;$$

w est donc un élément spécial du type I [1]), donc en posant

$$u = Mw$$

on a la lattice

$$\begin{array}{ccccc} Nu & \rightarrow & Nw & \rightarrow & v \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ f & \rightarrow & w & \rightarrow & u \end{array}$$

On a

$$x = NMNx \smile (w \frown Mx \frown MNx)$$

car

$$NMN[NMNx \smile (w \frown Mx \frown MNx)] = NMNx$$

$$M[NMNx \smile (w \frown Mx \frown MNx)] = NMNx \smile (u \frown Mx \frown MNx)$$

$$= (u \smile NMNx) \frown Mx = Mx$$

donc on peut appliquer le principe de détermination.

30. Introduisons les deux lois de composition

$$x + y = (NMx \frown NMNy) \smile (NMy \frown NMNx) \smile (Mx \frown My \frown MNx \frown MNy) \smile$$

$$\{w \frown [(NMx \frown My \frown MNy) \smile (NMy \frown Mx \frown MNx) \smile (NMNx \frown NMMy)]\}$$

$$x \cdot y = (NMNx \frown NMNy) \smile (Mx \frown My \frown MNx \frown MNy) \smile$$

$$\{w \frown [(NMNx \frown My \frown MNy) \smile (NMNy \frown Mx \frown MNx)]\}$$

1) Voir nos *Recherches* p. 445.

Ces deux lois sont commutatives.

On a

$$fx = f$$
$$f + x = x$$
$$vx = x$$

Il est naturel de poser

$$0 = f$$
$$1 = v$$

Or on a

$$w = v + v$$
$$Nu = w + v$$
$$u = Nu + v$$
$$Nw = u + v :$$

il convient donc de poser :

$$w = 2 \ , \ Nu = 3 \ , \ u = 4 \ , \ Nw = 5$$

et on voit que

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

et

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Ce sont donc l'addition et la multiplication modulo 6.

On voit que

$$x\,x = Mx$$
$$x(x\,x) = x$$
$$2x = x + x$$
$$3x = x + 2x$$
$$4x = x + 3x$$
$$5x = x + 4x$$

En posant $6x = x + 5x$ on a

$$6x = 0$$

Par des calculs assez longs on montre que „+" et „·" sont associatives et que „·" est distributive pour „+". On conclut que: *toute algèbre lukasiewiczienne axée est identique à un anneau commutatif à élément 1, de caractéristique 6:*

$$6x = 0$$
$$x^3 = x\,.$$

526.3/4 GEODÄSIE — PHOTOGRAMMETRIE

UNTERSUCHUNGEN UEBER EINEN WICHTIGEN FEHLER DER AEROTRIANGULATION

von **A. I. Corpaciu**

Die folgende Arbeit behandelt das Problem der technischen und praktischen Ausführung einer Aerotriangulation, indem wir besonders auf die Deformationsfehler, welche den Flugstreifen im Autograph charakterisieren, aufmerksam machen.

Die Fehler treten in den Versuchsdaten welche wir beifügen deutlich hervor und werden durch die Methode, welche wir gegen das Ende der Arbeit vorlegen, verbessert.

Der Artikel endet mit einigen Bemerkungen über die Wichtigkeit und Anwendung der Aerotriangulation.

Besonders in den letzten 10—15 Jahren, hat die Photogrammetrie mit Erfolg begonnen, fast alle Probleme der Vermessungskunde zu umfassen, weil sie grosse Vorteile und Vereinfachungen den alten Methoden der planimetrischen und nivellitischen Aufnahmen der Erdoberfläche darstellt. Die schnelle theoretische und praktische Entwicklung der Photogrammetrie wurde in glücklicher Weise von der Werkzeugtechnik unterstüzt, welche sich schnell allen neuen Ideen der Verbesserung anfügt. Dadurch erklärt sich warum die Auswertegeräte, welche in den bekannten geodätischen Werkzeugfabriken in Deutschland, Italien und der Schweiz erzeugt werden, genötigt sind, in kurzen Zeitspannen immer vollkommenere und spezialisiertere Geräte zu liefern, um die verschiedenen Probleme der Praxis zu lösen.

Die Photogrammetrie ist die Wissenschaft, welche sich mit dem Aufbau der Landkarten, unter Hilfenahme der Photographie, befasst. Für die Masstabsänderung, Modelldrehung der photographischen Platten, Ausgleichung der zahlreichen Fehler und der Kontrolle der Aufnahmetechnik, bedient sie sich der geodätischen Triangulationen, welche besonders auf dem Felde signalisiert werden, um auf den Aufnahmen sichtbar zu erscheinen. Um so mehr bestimmende Punkte wir auf dem Felde haben, welche in den Aufnahmen

sichtbar sind, desto leichter und genauer ist die Auswertung. Deshalb kann man die Photogrammetrie anwenden, besonders auf den Feldern, wo die geodätische Triangulation IV. Ordnung fertig ist. Doch bleibt sie nicht gänzlich unfruchtbar, dort wo die Felder kiene genügenden Vermessungspunkte haben; denn, obwohl sie teilweise auf die Genauigkeit der geodätischen Triangulation verzichtet, eine Genauigkeit welche auf billigen und wenig bevölkerten Flächen nicht so wichtig ist, — wie zum Beispiel viele der Kolonien, kann man auf aerophotogrammetrischer Weise, eine Triangulation aufbauen — eine Aerotriangulation, welche die Vorausbestimmung hat alle Fehler der Ersteren auszugleichen.

Wir werden uns nun mit einigen Einzelansichten der Aerotriangulation und ihrer Anführungstechnik befassen.

Wie wir behauptet haben, ist die Aerotriangulation geschaffen, um Aufnahmen in zurückgebliebenen Landstrichen zu machen, welche ungenügende geodätishe Vorarbeiten haben. In diesen Fällen, glauben wir, kann uns die Aerotriangulation wertvolle Dienste leisten.

Die Ausführungstechnik der Aerotriangulation besteht darin das Gelände vom Flugzeug senkrecht aufzunehmen, so dass zwei aufeinander folgende Aufnahmen eine Überlappung von 60% haben, dass heisst, die erste und die dritte Photographie enthalten ungefähr 30% gemeinsames Gebiet, u. s. w. (Fig. 1).

Der tatsächliche Aufbau der Aerotriangulation, nach diesen Photographien, wird mit einem der universellen Auswertegeräte Wild oder Zeiss, so wie folgt ausgeführt:

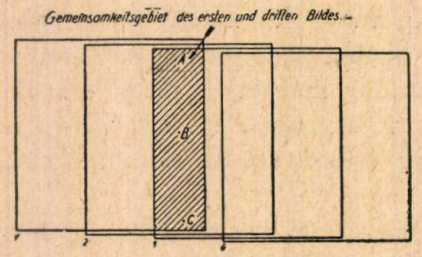


Fig. 1

Stellen wir uns vor, dass die absolute Orientierung des ersten stereoskopischen Bildes, mit Hilfe der drei bekannten Geländepunkte ausgeführt ist, welche auf den entsprechenden Photographien sichtbar sind. Jedes dieser Plattenpaare befindet sich nun richtig im Raum. Die erste Photographie ersetzen wir jetzt mit einer neuen, — der Dritten. Indem wir das stereoscopische Bild benützen, richtet sich diese letzte Photographie leicht nach der Bleibenden, so dass sie nach der Orientierung räumlich in der richtigen Lage erscheint. Führen wir diesen Prozess des Hinzuorientierens für einen Streifen zusamenhängender Aufnahmen durch, so ist jedes neue, im

Auswertegerät eingeführte Bild ohne weiteres auch im Roume, d. h. absolut, richtig orientiert. Um die richtige Uebertragung des Masstabes in das Instrument durchzuführen, ist es nötig, dass im Gemeinsamkeitsgebiet der drei auf einander folgenden Photographien, man drei Punkte A, B, C, je durch Lage und Höhe, so wie es die Fig. 1 zeigt, bestimmen kann. In Hinsicht auf die Detailoperationen beim Instrument müssen die obgenannten Punkte so eingesetzt werden, dass zwei, — A und C — sich am Rande des Streifens befinden und der dritte, B, in der Flugachse.

Die Lage der Punkte, kann man automatisch bestimmen, entweder zeichnerisch oder zahlenmässig mit dem x und y Zählwrck.

Die Punktreihe *A, B, C* welche folgemässig, zu gleicher Zeit mit einer neuen Einführung des Plattenpaares in den Autograph oder Stereoplanigraph bestimmt wird, bedeutet eine Aerotriangulation.

Die Aufgabe würde hiermit gelöst sein, wenn diese ganze Arbeit nicht mit zahlreichen und verschiedenen, systematischen und wahrscheinlichen Fehlern behaftet sein würde.

Einen dieser Fehler bildet das Thema der vorliegenden Arbeit.

Stellen wir uns vor, dass die Punkte einer Aerotriangulation auch im Felde, als Teil einer geodätischen Triangulation zu finden sind. Durch den Vergleich der Höhen, Kann man leicht eine Deformation aerotriangulierten Streifens in Bezug auf die Erdoberfläche ersehen (Fig. 2), eine Deformation, welche in einer systematishen

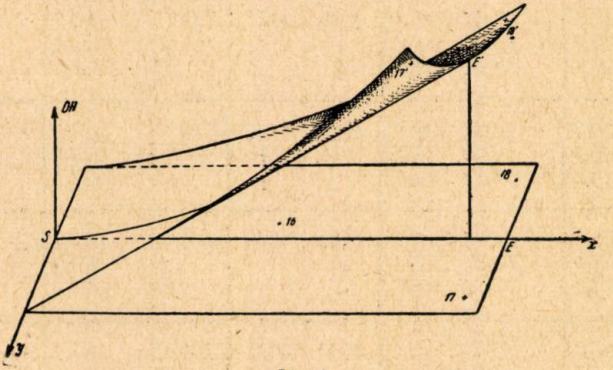


Fig. 2

Verbiegung nach oben oder unten, in der Längsrichtung und aus einer systematishen Torsion um die Achse des Flugstreifens zusammen, besteht. Die Praxis seigt uns, dass am Ende des Streifens, diese Deformation selbest hunderte von Meter erreichen kann.

In Hinsicht auf das Studium dieser Tatsache, haben wir eine Arbeit an einem Wild Autograph *A5*, Modell 1939 bis zur vollstän-

digen Beendigung einer Aerotriangulation unternommen, deren numerischen Daten wir in der folgenden Tabelle darstellen. Ich habe 13 Photographien, welche auf einem Gelände in der Schweiz gemacht wurden, benützt. Die verwendeten Angaben sind aus der Technik der Photogrammetrie bekannt. [1]).

Die Zahlen in der Klammer sind die „Soll Höhen" der betreffenden Punkte.

Punkt	Höhe	Orientierungselemente b_x, b_y, b_z,	Orientierungselemente k,w,l	Plattenpaar links	Plattenpaar rechts	Punkt	Höhe	Orientierungselemente b_x, b_y, b_z,	Orientierungselemente k,w,l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11 *a*	845,4	+ 99,25	397,43	4146	4145	14 *b*	731,3 (730,3)	+ 99,25	399,82
13 *a*	941,3	± 0,00	100,25	|		12 *a*	725,3 (725,3)	99,87	99,38
15 *b*	821,3	± 0,00	100,14	|		10 *b*	714,2 (713,2)	100,08	100,14
		f =208,50				11 *a*	845,4 (843,7)		
		φ_0=100,00 k_0=100,00	Allgemeine			13 *a*	941,3 (942,0)		
						15 *b*	821,3 (820,4)		
13 *a*	943,3	— 95,35	397,43	4146	4147	4147 *A*	935,5	— 95,35	396,88
15 *b*	820,8	± 0,00	100,25		|	*C*	993,8	96,72	99,38
11 *a*	843,0	± 0,00	100,14		|	*B*	763,4	99,60	101,49
4148 *B*	816,5	+ 94,67	396,15	4148	4147	4146 *C*	993,4	+ 94,67	396,88
C	851,0	93,40	99,02	|		*A*	935,2	96,80	99,38
A	1046,0	98,14	100,25	|		*B*	767,8	99,60	101,49
4148 *C*	850,8	— 95,93	396,15	4148	4149	4149 *B*	921,9	— 95,93	396,77
A	1045,4	93,40	99,02		|	*C*	879,8	90,05	100,14
B	814,0	98,14	100,25		|	*A*	977,4	98,37	99,56
4150 *C*	975,8	+ 94,85	394,97	4150	4149	4149 *C*	879,8	+ 94,85	396,77
A	871,0	85,67	101,20	|		*A*	979,3	90,05	100,14
B	952,4	97,73	99,33	|		*B*	924,2	98,37	99,56
4150 *B*	950,4	— 95,64	394,97	4150	4151	4151 *B*	987,1	— 95,64	395,82
A	870,1	85.67	101,20		|	*C*	995,6	82,97	100,26
C	975,3	97.73	99,33		|	*A*	944,4	96,38	101,31
4152 *B*	1062,6	+ 93,00	395,45	4152	4151	4151 *C*	995,4	+ 93,00	395,82
C	1012,0	80,07	100,26	|		*A*	943,6	82,97	100,26
A	1106,1	95,99	101,21	|		*B*	991,0	96,38	101,31

1) Sehe : Baeschlin und Zeller, Lehrbuch der Stereophotogrammetrie.

Punkt	Höhe	Orientierungselemente		Plattenpaar		Punkt	Höhe	Orientierungselemente	
		$b_x, b_y, b_z,$	κ,w,l	links	rechts			$b_x, b_y, b_z,$	κ,w,l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4152 *C*	1012,4	— 92,77	395,45	4152	4153	4153 *B*	1041,8	— 92,77	397,24
B	1065,4	80,07	100,26			*C*	1051,2	79,52	99,85
A	1102,7	95,99	101,21			*A*	1207,5	95,73	101,82
						Pkt. 16	1051,6 (1028,0)		
4154 *B*	920,0	+ 91,84	396,37	4154	4153	4153 *C*	1051,0	+ 91,84	397,24
C	962,5	79,99	98,41			*A*	1208,3	79,52	99,85
A	1148,0	95,52	99,95			*B*	1041,4	95,73	101,82
						Pkt. 16	1050,9		
4154 *C*	962,5	— 91,29	396,37	4154	4155	4155 *B*	912,5	— 91,29	395.22
A	1146,5	79,99	98,41			*C*	1082,6	78,59	101,14
B	916,9	95,52	99,95			*A*	1197,8	94,98	99,62
4156 *B*	850,0	+ 92,83	395,41	4156	4155	4155 *C*	1082,6	+ 92,83	395,22
C	1017,9	78,86	100,14			*A*	1199,2	78,59	101,14
A	1203,9	94,25	100,45			*B*	915,4	94,98	99,62
4156 *C*	1018,1	— 91,50	395,41	4156	4157	4157 *B*	946,6	— 91,50	394,37
A	1204,5	78,86	100,14			*C*	993,1	78,93	99,11
B	850,8	94,25	100,45			*A*	996,6	93,46	99,20
17 *a*	1053,1 (1011,4)	+ 96,00	392,55	4158	4157	4157 *C*	993,5	+ 96,00	394,37
17 *b*	1065,7 (1025,0)	74,83	99,10			*A*	998,8	78,93	99,11
18	1041,9 (1003,4)	92,60	99,85			*B*	948,6	93,46	99,20

Aus den Daten dieser Tabelle, kann man deutlich unsere Behauptung, bezüglich der obgenannten und durch Fig. 2 dargestellten Verbiegung, ersehen.

Gehen wir von der Hypothese aus, dass diese Verbildung parabolisch, nach der Fehlergleichung:

$$\Delta H = ax^2 + bx + cxy + d$$

fortschreitet.

Wo ΔH Höhenkorrektur bedeutet.

In Hinsicht auf die Bestimmung der Koeffizienten *a*, *b*, *c*, *d*, ha-

ben wir vier Fixpunkte: *S, 16, 17* und *18* durch Höhe und Lage gegeben:

Punkt	x	J	Δ H
S	± 0,00	± 0,00	— 0,65 m
16	+ 35,13 cm	+ 0.70 cm	— 23,60 m
17	+ 58,13 cm	+ 3,25 cm	— 41,20 m
18	+ 60,83 cm	— 3,24 cm	— 38,50 m

Die x und y in Zentimetern gemessen, sind die dem Plan entnommenen Distanzen; die Werte von ΔH sind die Zahlenmässigen in Metermaass gegeben.

Von der Gleichung (1) und den Fixpunkten: *S, 16, 17* und *18* Rechnung tragend, haben wir:

$$
\begin{aligned}
c &= -0{,}65 \\
1234{,}12a + 35{,}13b + c + 24{,}59d &= -23{,}6 \\
3414{,}06a + 58{,}43b + c + 189{,}90d &= -41{,}2 \\
3700{,}29a + 60{,}83b + c - 197{,}09d &= -38{,}5
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Aus der Lösung dieses Systemes bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
a &= -0{,}0004_5 \\
b &= -0{,}6292 \\
c &= -0{,}6500 \\
d &= -0{,}0113
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Wenn wir diese Werte in der Gleichung (1) ersetzen, folgt es:

$$\Delta H = -0{,}00045x^2 - 0{,}0113xy - 0{,}6292x - 0{,}6500 \qquad (4)$$

Man kann daraus für jede beliebige Entfernung x und y von S aus gemessen, die an die Autographen erhaltenen Höhen anzubringenden Verbesserung ($\pm \Delta H$) berechnen.

Venn wir zur Fehlergleichung (1) zurückkommen, haben wir sie auf der Basis einer bekannten Behauptung verwendet; denn solche Fehler, welche sich parabolisch weiter fortsetzen, haben als entsprechende empirishe Gleichung: $\Delta H = ax^2 + bx + c$.

Wegen der grossen Annäherung unserer Aerotriangulation, kann diese Formel nicht ernsthaft kritisiert werden. Weil sie wissen-

schaftlich nicht bewiesen ist, flösst sie uns kein Vertrauen ein, als nach einer langen Reihe von beweisenden Versuchen.

Deshalb versuchen wir im Nachfolgenden einen Weg zu weisen um die Fehlergleichung dieser Art abzuleiten.

Die Obgenannte Fehlergleichung wird mit einem xy Glied ergänzt, um sie umfassender und allgemeiner zu machen. Ansonsten gibt sie durch diese Ergänzung bessere Resultate.

Wenn wir mehr Fixpunkte gehabt hätten, würden wir noch andere Glieder der allgemeinen Gleichung der Flächen Zweiter Ordnung einführen.

Es ist Wahr, dass die Praxis einfachere Methoden, die jedem ungeübten Rechner zur Verfügung stehen, verlangt, während die Idee, eine Fehlergleichung mit 9 unbekannten Gliedern anzuwenden, zu praktisch unüberwindlichen Rechenschwierigkeiten führen wird. Trotzdem leiten sich die genäherten, vereinfachten Formeln von den Allgemeinen ab, welche den angenäherten, die dem Falle entsprechen, den Präzisionsinstrumenten welche wir benützen, den auszuwertenden Masstab, u. s. w. eigen sind. Deshalb stellen wir uns eine Fehlergleichung vor, die von der allgemeinen Gleichung der Flächen II-er Ordnung abgeleitet wird. Sie wird nur ein einziges Mal berechnet. Die Rechnungen werden zeigen, welche von der Gliedern vernachlässigt werden können. Daraus ergibt sich die genäherte Endformel. Wenn eine solche Formel dieselbe ist, wie die schon benützte, wird es um so besser sein. Um dass zu erreichen werden wir unter besonderen Bedingungen eine Aerotriangulation ausführen; man wird ein an geodätischen Fixpunkten reiches Gelände henötigen, dass keine zu grossen Höhenunterschiede aufwisste. Man braucht wenigstens neun solche geodätische Fixpunkte.

Un eine wichtige Fehlerreihe zu beseitigen, wird die ganze Arbeit mit grössten Sorgfalt und unter den bessten Bedingungen ausgeführt. Die Sichtbarkeit der Punkte im Feld, günstiges Wetter, die Stabilität des Flugzeuges, der Flugplan, die Qualität des photographischen Materials, die Klarheit der Photographien, so wie ein universelles Auswertegerät, neues Modell, sorgfältig justiert, von einem geübten stereoskopisch begabten Operpateur gehandhabt, dass sind einige Elemente die man im vorhinein sicher stellen muss.

In Rumänien kann man gegenwärtig eine solche Arbeit nicht ausführen, weil die technischen Mittel fahlen. Sie bleibt trotzdem eine offene Frage, welche von der Geodäsie und Photogrammetrie, eine Lösung erwartet.

Die Idee der Aerotriangulation ist, so glauben wir, eine inte-

ressante Erwerbung in der Praxis und der Technik der Geodäsie und Photogrammetrie.

Weil sie etwas Neues ist, konnte sie noch keine grosse Entfaltung erfahren, obwoll ihre Brauchbareit und Wichtigkeit nicht bestritten werden kann.

Durch ihre Anwendung im Gelände, arm von geodätischen Vermessugen, wird die Aerotriangulation ein kosbares Mittel der Zukunft werden, um die Erforschung und den Aufbau der Karten unbekannter Länder der Erde, wo es dem Menschen unmöglich scheint, einzudringen, auszuführen.

Wir denken besonders an die Karte der Pole und anderer ungeheuren Gegenden der Erdoberfläche, deren Formen bis jetzt nun ganz annähernd bestimmt werden konnten.

Wenn das stratospherische Flugzeug Wirklichkeit werden wird, dass die automate infra-rote Kammer die ganze Dimension aus schwindelnder Höhe, in seinem Objectiv umfassen kann, dann werden wir riesenhafte Aerotriangulation aufbauen können.

In jenem Moment, glauben wir, wird man, auf photogrametrischer Weise, mit Erfolg das Problem der Weltkarte lösen können.

Wenn wir die bekannten Prinzipien beibehahlten, und die künftigen technischen Mittel brauchen, wird vielleicht auch die transozeanische Aerotriangulation möglich sein; — denn die transozeanischen Passpunkte werden nicht die unbesiegbarsten Hindermisse bieten.

531.4 MÉCANIQUE.

SUR LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE DANS UN MILIEU RÉSISTANT

par Ing. **Alexandru Stoenescu**

Dans cet article, l'auteur donne une nouvelle méthode pour déterminer le mouvement d'un corps dans un milieu résistant, à l'aide du théorème de l'énèrgie cinétique, et arrive aux mèmes résultats que ceux donnés par M. le Prof. Vâlcovici dans les Disquisitiones Mathematicae et Physicae Tome I Fasc. I.

Dans le Tome I Fasc. 1 pag. 93 des *Disquisitiones Mathematicae et Physicae* M. le Prof. *Victor Vâlcovici* étudie le mouvement rectiligne d'un solide rigide de masse M soumis à l'action d'une *force constante* F, qui entretient le mouvement, et à une *résistance variable* R, du milieu en fonction de la vitesse v du solide:

$$R=A+Bv+Cv^2$$

Dans cette formule A, B, C, sont des constantes positives qui peuvent même être nulles. Nous donnerons, dans ce qui suit, une solution simple de ce problème par l'application du *théorème de l'énergie cinétique*. D'après ce théorème nous avons:

$$d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)=(F-R)dx$$

ou bien

$$Mvdv=(Mg-A-Bv-Cv^2)dx$$

En employant les notations de M. le Prof. V. Vâlcovici

$$a=\frac{A}{M}\ ,\quad b=\frac{B}{M}\ ,\quad c=\frac{C}{M}$$

et en tenant compte que

$$dx=vdt$$

nous obtenons l'équation différentielle aux variables séparées suivante:

$$\frac{dv}{g-(a+bv+cv^2)} = dt \qquad (1)$$

dont la solution se réduit à des quadratures.

Nous distinguerons trois cas, suivant le fait que les racines de l'équation

$$g-a-bv-cv^2=0 \qquad (2)$$

sont *imaginaires, confondues,* ou *réelles et distinctes.*

I. *Cas des racines imaginaires.*

Nous avons:

$$\Delta=b^2+4c(g-a)<0$$

En posant

$$\beta^2=-\frac{1}{4}\Delta$$

la solution de l'équation différentielle (1) est:

$$C_1-\frac{1}{\beta}\,arc\ tg\,\frac{cv+\frac{b}{2}}{\beta}=t \qquad (3)$$

où C_1 est la constante d'intégration.

Mais pour $t=o;\ v=v_0$ il résulte que:

$$C_1=\frac{1}{\beta}\,arc\ tg\,\frac{cv_0+\frac{b}{2}}{\beta}$$

ou en notant:

$$tg\varphi=\frac{cv_0+\frac{b}{2}}{\beta}$$

$$C_1=\frac{1}{\beta}\cdot\varphi$$

En introduisant cette valeur dans (3)

$$arc\ tg\,\frac{cv+\frac{b}{2}}{\beta}=\varphi-\beta t$$

et en passant de l'arc à la tangente dans les deux membres, nous obtenons:

$$cv+\frac{b}{2}=\beta tg(\varphi-\beta t)$$

ou bien

$$v=\frac{1}{c}\left[-\frac{b}{2}+\beta tg(\varphi-\beta t)\right]$$

qui est justement la formule 12 trouvée par M. le Prof. V. Vâlcovici à la page 96 de l'article sus-mentionné.

II. *Cas des racines confondues.*

Nous avons:

$$\Delta=b^2+4c(g-a)=0$$

La solution de l'équation différentielle (1) est dans ce cas:

$$\frac{1}{cv+\frac{b}{2}}+C_1=t$$

En déterminant la constante d'intégration par l'emploi des conditions initiales

$$t=o \qquad v=v_0$$

nous obtenons:

$$C_1=-\frac{1}{cv_0+\frac{b}{2}}$$

$$v=\frac{1}{c}\left[-\frac{b}{2}+\frac{cv_0+\frac{b}{2}}{1+\left(cv_0+\frac{b}{2}\right)t}\right]$$

Nous avons trouvé de cette manière la formule No. 9 de la page 95 trouvée par M. le Prof. Vâlcovici, où les constantes déterminées par lui, sont

$$C_1=1 \; ; \; C_2=cv_0+\frac{b}{2}.$$

III. *Cas des racines réelles et distinctes.*

En notant:

$$\rho^2 = b^2 + 4c(g-a) > 0$$

$$a_1 \; ; \; a_2 = -\frac{b}{2} \pm \frac{\rho}{2}$$

la solution de l'équation différentielle (1) peut s'écrire:

$$\frac{1}{\rho} \log \frac{cv-a_2}{cv-a_1} + C_1 = t$$

En déterminant la constante d'intégration comme dans les cas précédents, on obtient:

$$C_1 = -\frac{1}{\rho} \log \frac{cv_0 - a_2}{cv_0 - a_1}$$

$$\log . \left[\frac{cv-a_2}{cv-a_1} . \frac{cv_0 - a_1}{cv_0 - a_2} \right] = \rho t$$

ou

$$\frac{cv-a_1}{cv-a_2} = \frac{cv_0 - a_1}{cv_0 - a_2} . e^{-\rho t}$$

D'où on trouve:

$$v = \frac{1}{c} . \frac{a_1(cv_0 - a_2) + a_2(a_1 - cv_0)e^{-\rho t}}{cv_0 - a_2 + (a_1 - cv_0)e^{-\rho t}}$$

c'est-à-dire la formule No. 16 page 97 de l'article mentionné.

Le problème admet des généralisations intéressantes, des applications et des observations sur lesquelles nous reviendrons dans un prochain article.

532.5 MÉCANIQUE DES FLUIDES

ESSAI D'UNE THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES DÉFORMATIONS ET DES EFFORTS INTÉRIEURS D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

par **D. Germani**

La théorie classique, pour l'établissement des équations de Navier-Stokes *en régime laminaire, part de l'étude des déformations et des efforts élastiques d'un milieu continu, qui comportent des tenseurs symétriques, liés entre eux moyennant les constantes élastiques de* Lamé. *On substitue à celles-ci les constantes de la viscosité et aux déformations leurs vitesses, pour arriver ainsi par une voie, rigoureuse mais détournée, aux expressions des efforts de viscosité en fonction des vitesses de déformation.*

Dans cet article, une méthode élémentaire est exposée pour arriver au même résultat, ayant aussi l'avantage de mettre plus en évidence la partie physique du phénomène.

Pour étudier les déformations en un point dans un plan XOY, on y considère un disque circulaire mince de fluide, d'un diamètre infiniment petit, en établissant l'expression de la dilatation et de la déviation angulaire des différents rayons du cercle dans l'unité de temps. On établit ensuite l'expression des efforts de viscosité, excercés dans le même plan, sur une facette normale quelconque, en fonction des efforts exercés dans les directions des rayons dont les déviations sont nulles (directions principales).

En partant de la loi de proportionnalité, évidente pour ces directions principales, dans le cas d'un milieu isotrope incompressible, entre les efforts normaux et les dilatations correspondantes en l'unité de temps, moyennant une constante d'abord indéterminée, on constate que cette proportionnalité s'applique pour toute autre direction. Enfin l'expression de la loi de Newton, *moyennant le coefficient de viscosité, dans sa forme générale en fonction de la vitesse de déformation angulaire, rapportée à des axes quelconques, si elle est appliquée au cas où la déviation ou la déformation angulaire est maximum, permet de montrer que la dite constante est le double du coefficient de viscosité, ce qui détermine complètement l'expression des efforts cherchés.*

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'établir d'une façon élémentaire la théorie des déformations (dans l'unité de temps) autour d'un point, d'un milieu fluide incompressible, de même que les relations qui les relient aux efforts de viscosité en régime laminaire

Tandis que les efforts élastiques sont fonctions des déformations,

on sait que, d'après la loi de *Newton*, les efforts de viscosité sont fonctions des viteses de ces dernières.

Soit $\overline{v}$ la vitesse à un point quelconque du milieu fluide, ayant comme composantes selon trois axes orthogonaux: v_x, v_y, v_z.

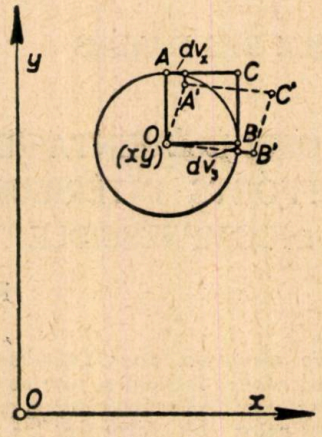


Fig. 1

Considérons, d'abord (fig. 1), ce qui se passe dans une couche mince parallèle au plan xy, dans laquelle nous envisagerons un disque de rayon $dx=dy$, lequel, au moment initial, a son centre au point O, pouvant être animé, dans le mouvement général du milieu, d'un triple mouvement élémentaire, à savoir: une translation (celle de O), une rotation autour d'un axe passant par O, mais dont nous considérerons seulement la composante autour de OZ, parallèle à oz, et une déformation, indépendante des deux mouvements précités, qui sont des mouvements d'ensemble.

A la fin du déplacement élémentaire de cette masse (dans l'unité de temps) on peut, par une translation élémentaire inverse, ramener le centre en question au point O, en laissant subsister seulement les effets de la rotation et de la déformation.

Soit A' et B' les nouvelles positions, en projection sur le plan xy, des points A et B de la circonférence, situés au moment initial sur les parallèles aux axes oy et ox, menées du centre.

On aura évidemment pour les valeurs des angles $\sphericalangle AOA$ et $\sphericalangle BOB'$ respectivement

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad -\frac{\partial v_y}{\partial x},$$

c'est à dire, pour le premier par ex., l'accroissement du déplacement

v_x (dans l'unité de temps) lorsqu'on passe de O au point A, donc par variation du y seul de dy etc. Il est évident que la suppression de la translation ne change pas de pareils accroissements.

Si le disque ne s'est pas déformé, ces angles seront égaux et l'angle au centre $\sphericalangle A'OB'$ sera droit, comme il l'était auparavant, chacune des expressions ci-dessus représentant la rotation d'ensemble, subie par le disque autour de l'axe OZ. Dans le cas contraire la moyenne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \omega_z ,$$

exprimerait la rotation *moyenne* ω_z de l'angle $\sphericalangle AOB$, car il n'est pas question de la rotation d'un ensemble rigide.

Mais ce ω_z est une rotation moyenne non seulement de l'angle $\sphericalangle AOB$ mais bien du disque entier, car, en usant des relations entre les anciennes et les nouvelles coordonnées, en cas de changement des axes orthogonaux autour de l'origine, en constate facilement que l'expression qui précède est un *invariant*, exprimant ainsi la vraie moyenne des rotations de tous les rayons vecteurs élémentaires autour de O, ayant ce point comme origine.

Mais, dans ce dernier cas de déformation, où les deux termes précités ne sont pas égaux, leur différence

$$2\beta = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

représenterait évidemment la *déformation* (diminution) *angulaire* de l'angle droit $\sphericalangle BOC$ et, en même temps, le glissement relatif d'un des côtés du carré (ou de la facette du parallélipipède) $OACB$ par rapport au côté (ou à la facette) opposé, glissement rapporté à l'unité de distance entre côtés (ou facettes) parallèles.

Dans le cas particulier (fig. 2) où l'on a l'égalité

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} ,$$

la rotation moyenne ω_z est nulle, et cette égalité, malgré la variation de ses deux membres, aura lieu pour tout couple de diamètres rectangulaires, selon le schéma ci-dessous, où, des trois mouvements composants sus-mentionnés, la déformation seule subsiste. On voit qu'il y a des angles droits qui se trouvent diminués, d'autres (les

suppléments des premiers) qui se trouvent augmentés après la déformation, et, si l'on envisage, dans le cas de la figure 2, les divers angles droits qu'on obtient en tournant par ex. l'angle de la première catégorie, representé par XOY, dans le sens trigonométrique, jusqu'à ce que son côté OX vienne à la place de OY et l'autre côté OY vient en $-OX$, on tombera sûrement dans la région où les angles droits croissent par la déformation. Il y aura donc sans doute, dans ce parcours de 90^0, un angle au centre droit, qui reste indéformable, donc avec les directions de ses côtés fixes, malgré la déformation de l'ensemble autour de O, et, pour deux pareilles directions rectangulaires, soit 1 et 2, on aura:

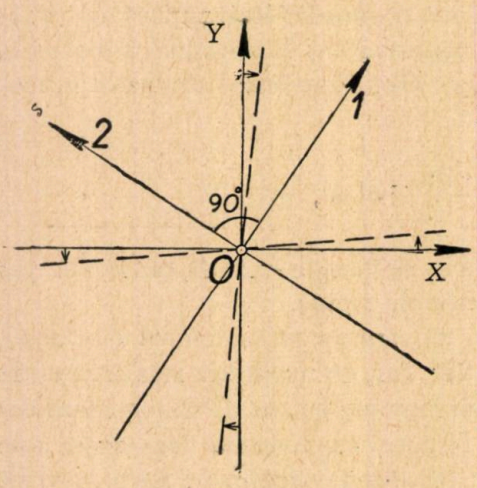


Fig. 2

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \beta = 0.$$

Prenons ces deux directions particulières, que nous appelerons axes principaux de déformation dans le plan XY, comme axes de référence (fig. 3 ou 4) et occupons-nous maintenant des dilatations (ou contractions), dans l'unité du temps, des rayons du disque considéré.

Soit $\varepsilon_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ cette dilatation proportionnelle (positive ou négative) dans les sens OX et $\varepsilon_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y}$ dans le sens OY, et cherchons la nouvelle forme du cercle élémentaire au rayon R, après la déformation.

Comme on a pour le cercle:

$$\frac{X^2}{R^2} + \frac{Y^2}{R^2} = 1$$

et comme

$$X' = X(1+\varepsilon_1)$$
$$Y' = Y(1+\varepsilon_2),$$

on aura pour la nouvelle courbe

$$\frac{X'^2}{R^2(1+\varepsilon_1)^2} = \frac{Y'^2}{R^2(1+\varepsilon_2)^2} = 1$$

et celle-ci sera donc une ellipse, ayant *1* et *2* comme axes principaux On ne pourra donc avoir qu'un seul système d'axes rectangulaires principaux de déformation, à moins que la forme circulaire ne soit conservée pendant la transformation (compression ou traction uniforme autour du point *O)*, cas où *toutes* les directions seront *principales.*

Si la déformation est à volume constant (ce qui est toujours le cas des fluides dits: *incompressibles,* mais qui peut être aussi le cas d'un gaz pour des variations de densité négligeables) et qu'il s'agisse d'un phénomène plan ayant *xoy* comme plan directeur, l'égalité d'aire du cercle de rayon R et de l'ellipse aux semiaxes $R(1+\varepsilon_1)$ et $R(1+\varepsilon_2)$ donne: $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ (fig. 3).

Un rayon quelconque r' de cette ellipse, ayant comme projections

$$X' = X(1+\varepsilon_1)$$
$$Y' = Y(1-\varepsilon_1),$$

donne pour une déformation infinitésimale

$$r'^2 = R^2 + 2\varepsilon_1(X^2 - Y^2)$$

ou

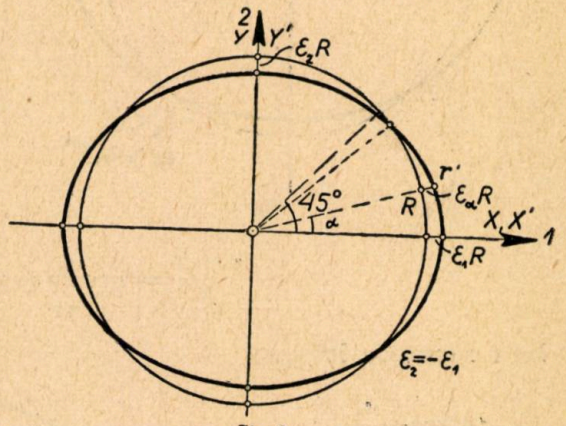


Fig. 3

$$2R(r' - R) = 2R^2\varepsilon_1(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

d'où l'on tire

$$\frac{r' - R}{R} = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 \cos 2\alpha$$

pour la dilatation linéaire proportionnelle dans n'importe quelle direction. Pour $\alpha = 45^0$ on a $\varepsilon_{45^0} = 0$.

Il est facile de voir que, dans le premier quadrant, tous les rayons r' se trouveront tournés vers la droite des R primitifs, d'une quantité qui varie de zéro (aux axes) à un maximum ($\alpha = 45^0$).

Ainsi, là ou la déviation d'un rayon est nulle, la déformation linéaire est maximum et vice versa.

Mais, dans le cas général, où le mouvement n'est pas plan, il est possible que le fluide, tout en étant incompressible, s'écoule aussi

transversalement, et alors l'égalité de surface mentionnée n'a plus lieu, donc:

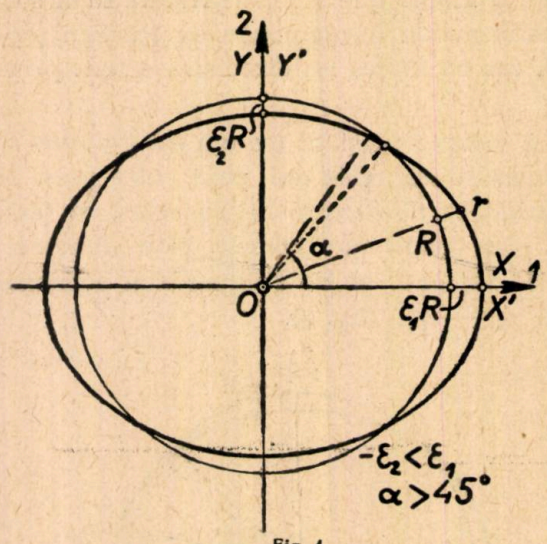


Fig. 4

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0.$$

En ce cas général (fig. 4), où l'on a par hypothèse pour la dilatation cubique dans l'unité de temps

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

(où ε_3 correspond à la direction OZ), on aura

$$X' = X(1 + \varepsilon_1)$$

$$Y' = Y(1 + \varepsilon_2)$$

$$r'^2 = R^2 + 2\varepsilon_1 X^2 + 2\varepsilon_2 Y^2$$

$$2R(r' - R) = 2R^2(\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \sin^2\alpha)$$

$$\frac{r' - R}{R} = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \sin^2\alpha = \varepsilon_\alpha.$$

Ici ε s'annulle lorsque

$$tg^2\alpha = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

tandis que la déviation maximum est toujours à 45^0 et égale à $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ ce qui s'obtient en exprimant, projeté sur la tangente au cercle, le chemin parcouru par l'extremité du rayon R_α pendant la déformation (fig. 5):

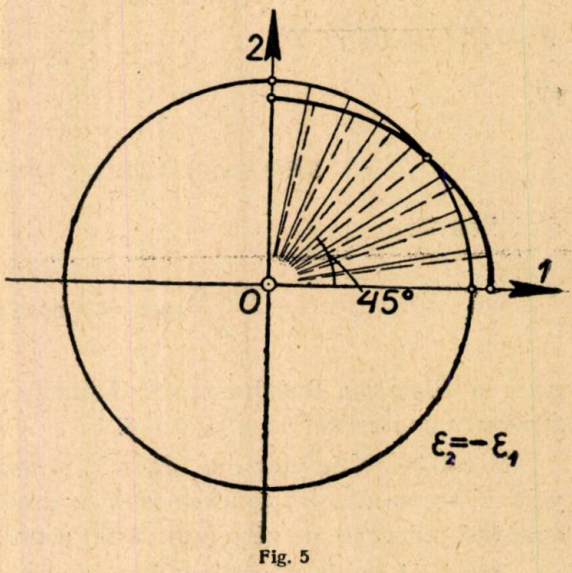


Fig. 5

$$X\varepsilon_1 \sin\alpha - Y\varepsilon_2 \cos\alpha = R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin 2\alpha.$$

Passons maintenant aux efforts de viscosité normaux et prenons:

comme positifs les efforts de compression, qui ont plus d'importance en hydrodynamique, correspondant à des ε négatifs et vice versa.

Comme le *volume reste constant* (contraction ou dilatation volumique nulle) on aura évidemment, pour les directions principales de déformation, avec un coefficient de proportionnalité positif k, le même pour ces deux directions (pour des raisons d'isotropie et de symmétrie)

$$\sigma_1 = -k\varepsilon_1$$

avec $\tau_1 = 0$, car il n'y a pas de glissement dans la direction *1*, et

$$\sigma_2 = -k\varepsilon_2$$

avec $\tau_2 = 0$ pour la même raison.

Ici l'indice de σ se rapporte à la direction de l'effort, la facette sur laquelle celui-ci s'excerce étant à 90^0, respectivement 2 et 1.

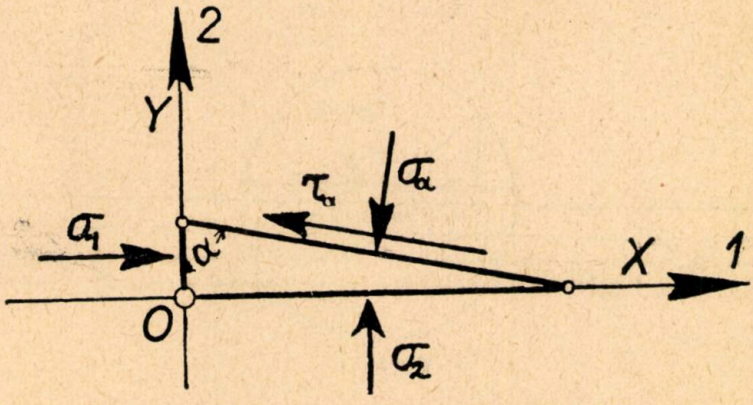


Fig. 6

Considérons dans la couche d'épaisseur élémentaire = *1* un prisme triangulaire (fig. 6) de dimensions tranversales infiniment petites par rapport à l'épaisseur de la couche (afin que l'on puisse négliger les efforts τ sur les bases), limité par les plans XOZ et YOZ et un plan quelconque, formant l'angle α avec le plan OY, sur lequel s'exerce l'effort principal minimum σ_1.

On trouve facilement, en multipliant les efforts par les surfaces sur lesquelles ils s'exercent:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha \\ &= k(\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \sin^2\alpha) = -k\varepsilon_\alpha \qquad (1)\end{aligned}$$

et

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha, \qquad (2)$$

τ, d'après la loi de *Newton*, étant proportionnel à la vitesse angulaire de déformation; si l'on prend la direction ox parallèle à la trace de la facette où s'excerce τ et qui sera donc perpendiculaire sur oy, on aura:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{dx}\right), \qquad (3)$$

et nous noterons par τ_z cette valeur commune des deux efforts τ perpendiculaires sur la direction de oz, τ parallèle à ox étant considéré positif dans le sens choisi sur la figure.

Dans le cas particulier du phénomène plan avec $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, donc $\sigma_2 = -\sigma_1$ on aura:

$$\sigma = -\sigma_1 \cos 2\alpha$$

$$\tau = -\sigma_1 \sin 2\alpha.$$

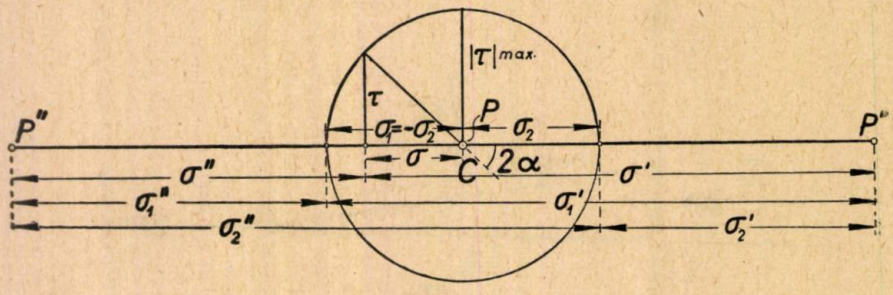


Fig. 7

On arrive ainsi à la représentation graphique (fig. 7) du cercle de Mohr employé en „Résistance des Matériaux" avec le pôle à droite du centre C du cercle en P' si $\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}$ est négatif, à gauche de C en P'' si cette moyenne est positive, ou au centre même du cercle en P s'il s'agit du phénomène plan.

Il résulte de la relation $\sigma_\alpha = -k\varepsilon_\alpha$ qu'il y a proportionnalité, avec le même coefficient k, entre σ et ε, pour *toutes les directions* et non seulement pour les deux directions principales, où cette propriété s'imposait pour des raisons de symmétrie et d'isotropie.

Il ne reste qu'à déterminer la valeur de ce coefficient de proportionnalité k.

Pour cela passons aux efforts τ, dont l'expression est donnée par la loi fondamentale de la viscosité, énoncée par *Newton*, dans laquelle par définition μ est le coefficient de viscosité, résultant

de cette loi, qui n'est qu'une adaptation au mouvement visqueux de la loi correspondante en élasticité.

La relation *(2)* donne

$$\tau_{45^0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = -\frac{k}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Mais pour $\alpha = 45^0$ on est dans le cas de la déviation angulaire maximum pour chacune des directions Ox et Oy, égale chacune comme on a vu, à $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, et d'après *(3)* on peut écrire alors:

$$\tau_{45^0} = -\mu(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Il résulte

$$k = 2\mu \qquad \text{et par conséquent} \qquad \sigma_\alpha = 2\mu\varepsilon_\alpha = -2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Dans le mouvement général, c'est-à-dire avec déformation sur tous les trois plans d'un parallélipipéde élémentaire $dx\ dy\ dz$, ayant O comme centre, on aura ainsi les expressions suivantes, trouvées plus haut pour les efforts et complétées dans ce tableau par permutation circulaire:

$$\sigma_x = -2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad \tau_x = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_y = -2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} \qquad \tau_y = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_z = -2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \tau_z = -\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Dans un pareil mouvement général, une sphère au centre O (dont on peut découper un disque, analogue au précédent, par deux plans parallèles quelconques infiniment voisins du centre) ne peut être déformée qu'en un ellipsoide, car toutes ses sections, comme nous avons vu, sont des ellipses. On aura pour ses axes principaux

$$\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \varepsilon_3 = 0,$$

mais les directions *1* et *2* ci-dessus ne seront des axes principaux de cet ellipsoide que si OXY en est un des plans principaux. Mais on aura aussi pour tout autre système d'axes orthogonaux

$$\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z = 0,$$

car cette expression représente la dilatation cubique dans l'unité de temps.

Si on fait abstraction de la viscosité (fluide parfait) les efforts transversaux s'évanouissent, et le cercle de Mohr pour n'importe quel plan se réduit à zéro, tandisques σ moyen, qui intervient seul, n'est que la pression p au point considéré, fonction uniforme de ce point (fig. 8 a).

Fig. 8 a.

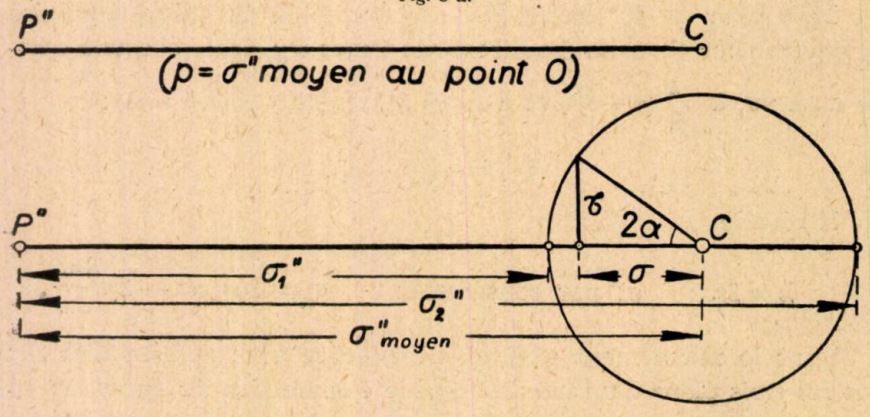


Fig. 8 b.

Il faut noter que, si l'on veut légitimer l'extension de lois élastiques aux liquides, comme on le fait ordinairement dans les traités, on doit admettre que ceux-ci sont tant soit peu compressibles (comme il le sont du reste suffisamment) afin de pouvoir établir entre p et la dilatation (contraction) volumique une relation, car autrement l'application de la théorie élastique n'aurait plus de sens. Mais, pour les fluides incompressibles on n'a pas besoin de la théorie élastique, basée sur les déformations, pour expliquer et en déduire la pression univoque non nulle en un point, qui, pour un liquide en équilibre par ex. est due à une autre cause, de nature statique, généralement au poids de la colonne de liquide superposée et à la pression atmosphérique.

On aura donc, par la superposition des deux états, celui du fluide parfait et celui du fluide visqueux, dans n'importe quel plan passant par un point O, le schéma du cercle de Mohr, de la fig. 8 b.

Dans un phénomène plan, $P''C$ sera la pression p, mais dans un mouvement quelconque $P''C$, représentant le σ moyen de la section plane d'une sphère élémentaire par un plan quelconque, pourra différer de la moyenne générale de la pression au point O.

Les équations de *Navier-Stokes* pour la dynamique des fluides

visqueux, s'établissent généralement en complétant celles d'Euler pour les fluides parfaits

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = j_x$$

(où $\overline{F}$ est l'intensité du champ extérieur et $\overline{j}$ l'accelération) par l'introduction des termes dus aux 6 efforts de viscosité: σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z.

On obtient ainsi les dites équations

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_x = j_x \quad \text{etc.}$$

Pour plus de rigueur on peut vérifier entre autres, que τ_{yx} (ou τ_z) et τ_{zy} (on τ_x), qui s'excercent dans la facette $dz\,dy$, se composent *géométriquement* pour donner l'effort transversal réel dans cette facette, de la même façon que les déformations des angles droits XOY et YOZ, ou plutôt *les glissements* de l'extremité de OY dans les facettes de ces angles, se composent géométriquement pour donner le glissement réel entre les facettes parallèles $dx\,dz$.

La théorie élémentaire, exposée plus haut, nous a fourni les efforts de viscosité sans les ressources de la méthode classique, basée sur les constantes élastiques de Lamé, qui ont leurs correspondantes en viscosité.

Cette méthode, employée dans tous les cours, est sans doute excellente, mais elle a recours à des développements trop théoriques, tout en masquant la partie physique du phénomène, à laquelle les techniciens attachent une importance particulière.

541.1 CHIMIE PHYSIQUE

SUR LE RENVERSEMENT DE LA FORCE ÉLECTROMOTRICE DU COUPLE ÉTAIN-FER DANS LES ACIDES DILUÉS

par **Er. Toporescu**

L'auteur explique le phénomène de renversement de la f. é. m. observé par M. T. P. Hoar, en tenant compte de la vitesse de la réaction entre le fer et les acides pour former des sels ferreux, substances réductrices, qui ont une grande influence sur la polarité des métaux.

A la suite d'une étude faite sur la corrosion du fer blanc, M. T. P. Hoar [1]) arrive a une série de conclusions trés intéressantes. Parmi les observations faites, il montre le rôle des oxydes présents initialement sur les métaux dans la formation des couples locaux et, il met en évidence le renversement de la f. é. m. *Sn-Fe* dans les acides dilués.

En effet, le couple *Sn-Fe* plongé dans divers acides change de polarité: dans une solution d'acide sulfurique l'etain est positif dans l'acide oxalique, citrique, etc., il est négatif.

L'explication que M. Hoar donne pour ce renversement est que l'étain forme avec les acides oxalique et citrique des complexes, tandis que, avec l'acide sulfurique il ne forme pas.

En reprenant ces deux expériences je suis arrivé à la conclusion, qu'on doit employer pour la détérmination de la différence de potentiel entre les métaux une solution d'une substance réductrice, comme celle de sulfite de sodium, parceque la substance réductrice enlève l'oxygène et les oxydes qui sont à la surface des métaux.

Le rôle des oxydes et de l'oxygène adsorbé sur les surfaces des métaux est un phénomène bien connu dans la passivité des métaux [2]).

Les résultats obtenus pour la différence de potentiel entre les

1) T. R. Hoar Trans. Faraday Soc. 1934 vol 30 p. 472 (d'aprés la référence de Bul. Soc Chim. France 1934 C. P. 423).
2) L. Colombier. L'état passif des métaux. Étude de la passivité du nichel. Ed. Gauthier-Villars 1935.

métaux *Sn-Pt* dans une solution de $SO^3Na^2.7H^20$, pro analysi, un pour cent, determinée avec un électromètre Dolezalek d'une grande sensibilité sont representés par la courbe *a* (fig. 1). De ces résultats on voit que la différence de potentiel est constante pour un temps compris entre 15—120 minutes et, ils sont parfaitement réproductibles avec des solutions faites 15 minutes avant de les employer.

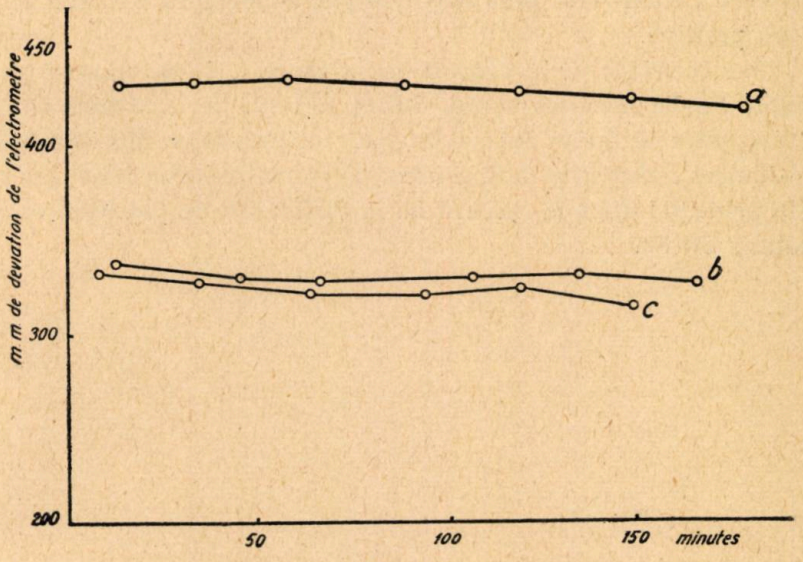


Fig. 1

Si on soumet les solutions de sulfite à un faible courant d'oxygène pendant 5 heures ou, si on les soumet aux rayons d'une lampe en quartz à vapeur de mercure la différence de potentiel varie d'après les courbes *b* et *c* (fig. 1); les solutions de sulfite ont été oxydées. Donc, en mesurant la différence de potentiel *Sn-Pt*, on peut suivre l'oxydation d'une solution de sulfite.

Les solutions de sulfite de sodium se conservent assez bien pendant 24 heures, dans des flacons colorés et bouchés.

Ces éxperiences m'ont conduit à donner une explication de la cause pour le renversement de la f. é. m. *Sn-Fe* dans les acides dilués.

Le couple *Sn-Fe* mis en contact avec l'acide sulfurique donne, à la suite de la réaction entre le fel et l'acide, le sulfate ferreux, substance réductrice. Cette substance réagit avec l'oxygène adsorbé par

le métal étain, l'étain prenant la polarité positive par rapport au métal fer.

Le même couple mis dans l'acide oxalique ne donne pas d'oxalate ferreux, parceque la vitesse de réaction entre le fer et l'acide est très lente. L'étain conserve sur sa surface l'oxygène, il est passif. Mais, si l'on ajoute à la solution d'acide oxalique une quantité trés faible d'oxalate ferreux, substance egalement réductrice, la polarité de l'étain n'est plus négative par rapport au fer, elle est toujours positive.

Par conséquent, le renversement de la f. é. m. observé pour le couple *Sn-Fe* dans les acides dilués, dépend de la vitesse de la réaction entre le fer et les acides pour la formation des sels ferreux, substances réductrices qui, comme je l'ai montré plus haut, jouent un rôle principal dans la mesure de la différence de potentiel entre les métaux *Sn-Fe*.

SUR LE DOSAGE DU ZINC

(IV-ème note)

par **Constantin Belcot**

Nous avons fait l'étude comparative de plusieurs méthodes analytiques. Il en résulte que, pour les laboratoires industriels, surtout en présence du fer, la méthode de Taylor *est très bonne. La méthode de* Galetti *reste suffisamment exacte ; il en est de même, dans certaines conditions pour celles de* Spacu.

Introduction. Nous avons indiqué dans les notes précédentes [1]) le but poursuivi dans nos recherches: C'est de pouvoir recommander aux laboratoires industriels les méthodes les meilleures, c'est-à-dire assez rapides pour l'industrie et en même temps d'une précision suffisante, parmi le bon nombre qu'on trouve dans les divers traités et revues.

Pendant plusieurs années nous avons vérifié quelques méthodes et après un premier choix, nous les avons fait cérifier aussi par nos étudiants. Dans le présent travail nous exposerons les résultats en ce qui concerne le dosage du zinc.

Dans l'industrie il se présente souvent les cas suivants:

a) Les sels de zinc; *b)* le zinc pur et *c)* les minéraux de zinc.

Le dosage du zinc peut s'effectuer A) par voie sèche; B) par voie humide.

Etant donné que maintenant les méthodes par voie sèche ne sont plus employées, parceque les résultats obtenus sont entachés d'erreurs souvent considérables, nous avons borné nos recherches aux méthodes par voie humide.

Ces formes du dosage peuvent se subdiviser en trois groupes: I) Procédés volumétriques, II) Procédés gravimétriques et III) Procédés électrolytiques.

De nos jours ce sont les procédés volumétriques qui sont les

1). C. Belcot, Bull. soc. chim. France (4) *39*, 1483, 1926; id. (4) *39*, 1648, 1926; Ann. chim. anal. *20*, 173, 1938.

plus employés; par conséquent nous trouvons utile d'exposer les résultats comparatifs des méthodes suivantes:

1). La méthode au sulfure de sodium;

2). La méthode *Galetti;*

3). La méthode de *Taylor* [2]).

4). La méthode de *Spacu* et *Dick* [3]) (gravimétrique);

5). La méthode de *Spacu* et *Macarovici* [4]).

Naturellement, dans les laboratoires bien outillés on peut doser rapidement et exactement le zinc par la méthode électrolytique ou bien par l'électrométrie, par exemple par la méthode ferrocyanométrique de *Galetti-Fahlberg,* ou ses modifications.

Les méthodes. 1) Le principe de la méthode *Galetti (De Koninck et Prost)* est le suivant: Précipiter le zinc en solution chlorhydrique, légèrement acide, à l'état de ferrocyanure doublé de zinc et de potassium $[Zn_3K_2Fe_2\ (C.\ N.)_{12}]$ et titrer en retour l'exces de ferrocyanure potassique employé, au moyen d'une solution titrée de chlorure zincique.

2). La méthode „modifiée" de *Schaffner* (désignée aussi sous le nom de „méthode belge standardisée") est basée sur la précipitation du zinc en solution épurée et faiblement ammoniacale, par une solution titrée de sulfure sodique en excès. Cet excès est révélé à la touche, par du „papier de plomb" (carbonate de plomb) (en allemand: Papier Polka) qui *pratiquement* ne réagit pas avec le sulfure

3). La méthode de *Taylor.* On ajoute 20 cm.^{3} d'une solution saturée de chlorure d'ammonium à 5—10 cm.^{3} de la solution zincique, qui contient 0,15—0,25 g. de zinc. On neutralise en présence du méthylorange avec une solution 0.5 n de bicarbonate de soude, on ajoute 100 cm.^{3} de l'eau d'hydrogène sulfuré et on titre de nouveau avec de la solution 0,5 n de bicarbonate de soude jusqu'à ce que le précipité prend une teinte brune de chocolat. Chaque goutte de la solution de bicarbonate donne un précipité noir, qui disparait rapidement; quand cela n'arrive pas, il manque de l'eau d'hydrogène sulfuré.

1 cm.^{3} de solution *0,5 n* de $CO_3H\ Na = 0{,}01634\ g\ Zn.$

4). La méthode gravimétrique de *Spacu.* On précipite le zinc sous la forme de $(Zn\ Py_2)\ (S\ C\ N)_2$ d'une solution neutre.

Du poids de l'oxyde de zinc, obtenu dans les conditions de travail indiquées, très pur, blanc et rigide, on déduit la quantité du zinc. Cette méthode demande trois heures tout au plus, tandis que la

2). *Tailor* J. chem. Soc. ind. *28*, 1294, 1910.
3). *Spacu et Dick:* Bul. sc. Cluj *4* 177, 1928
4). *Spacu et Macarovici* id. *8* 129 1934.

méthode classique demande 24—30 heures et on obtient un précipité cristallin, très facile à filtrer et à laver.

Dans la modification on dilue la solution neutre du sel de zinc à environ 50—75 cm.^{3} avec 0,5—1 g de sulfocyanure d'ammonium. On filtre à travers le creuset à filtre en porcelaine, on sèche un quart d'heure dans le vide et on déduit le zinc, d'après: $Zn = \frac{a.F.100}{S}$

$$F = 0,\ 1925\ (log\ 28437)$$

La méthode volumétrique de *Spacu* et *Macarovici* repose sur la réaction:

$$X_2Zn + 2SCN.NH + 2Py = (ZnPy_2(SCN)_2) + 2XNH_4.$$

On détermine l'excès de sulfocyanure alcalin qui se trouve dans un volume connu de solution, mais après avoir précipité d'abord le zinc par de la pyridine et du sulfocyanure d'ammonium et après avoir éloigné l'amine formée à l'aide d'un filtre sec.

Mode d'opération. Nous avons travaillé a) Avec des solutions de sulfate de zinc b) Avec de la pyrite.

a) Nous avons préparé des solutions de sulfate de zinc dans de l'eau distillée de la manière suivante: Nous avons pesé *28,7560* g de $SO_4Zn.7H_30 (Zn = 65,37)$ et nous avons fait 2000 cm.^{3} de solution aqueuse dans un ballon jaugé. Cette solution contient donc *0,0144 g* de $SO_4Zn.7H_20$ par centimètre cube, ou bien *0,0033 g Zn.*

Comme contrôle nous avons fait des dosages éléctrolytiques; la moyenne en est *0,1648 g Zn* dans 50 cm.^{3} de notre solution.

b) Parmi une quantité de pyrites analysées nous donnerons les deux résultats qui suivent:

TABLEAU 1

	1	2
gangue	31,31	36,78
Fe	22,66	20,27
S	19,67	24,01
Zn	12,51	8,30
Cu	6,02	9,31
Pb	2,21	1,33
Ca 0	5,58	—

Nous avons travaillé d'après la méthode donnée par *Meurice* [5], avec une prise d'essai de 5 g

5). *A. Meurice.* Cours d'analyse minérale 2-éme éd. page 470.

TABLEAU 2

I. Solution de sulfate de zinc pur; dans 1 cm^3 = 0,0033 g Zn.

Calculé	Limite d'erreur (%) par dosage d'après:				
	Galetti	Schaffner	Taylor	Spacu (Volum).	Spacu (grav.)
0,0825	−0,2 et+0,4	+0,5	+0,6	+1,3−1,25	Tout au plus ± 0,1.
0,1650	−0,1 et+0,5	−0,2 et+0,3	+0,5	+1,3−1,25	
0,3300	+0,6	−0,2 et+0,3	−0,3 et+0,3	+1,3−1,25	
0,4125	+0,7	+0,3 et+0,8	−0,3 et+0,3	+1,3−1,25	
0,4950	−0,2 et+0,3	+0,1 et+0,6	−0,2 et+0,4	+1,3−1,25	

II Pyrite (voir le tableau 1).

La limite d'erreur est du même ordre avec la solution de SO_4 Zn . $7H_2O$.

Conclusions.

De nos résultats on peut tirer les conclusions suivantes:

1) La méthode de *Schaffner* demande une certaine habitude de la part de l'opérateur pour donner des résultats concordant à 0,5% près.

2) La méthode de *Galetti* donne des résultats qui valent largement ceux de la méthode précédente et tout en demandant une moins grande habitude.

3) En présence du fer c'est la méthode très rapide de *Taylor* qui nous semble la meilleure.

4) La méthode volumétrique de *Spacu* est exacte et rapide. Il faut éloigner la plus grande partie des sels d'amonium et les solutions trop acides doivent être évaporées à sec, reprises avec de l'eau et ensuite précipitées.

5) La méthode gravimétrique de *Spacu* est très exacte et suffissament rapide, car on peut doser le zinc dans l'espace d'une heure tout au plus; elle n'est pas applicable en présence des grandes quantités de sel d'ammonium.

552.57 PÉTROGRAPHIE

CALCAIRES ORGANOGÈNES DANS LE BASSIN DE PETROŞENI (Roumanie)

par **Mircea D. Ilie** et **G. Manolescu**

La présence de calcaires à Lithothamnium dans le bassin miocène de Petroşeni prouve que nous avons affaire à des dépôts tortoniens.

En effet, il nous semble actuellement que tout les bassins internes ds la Transylvanie soient occupés par des dépôts aquitaniens et tortoniens.

Il se recommande cependant dans l'avenir de prêter une grande attention à la séparation des divers horizons dans le bassin Petroşeni.

Le bassin miocène de Petroşeni-Lupeni est sillonné dans presque toute sa longueur par les deux rivières: Jiul roumain et Jiul transylvain, qui s'unissent près du village Iscroni. D'ici en aval, Jiul a creusé, dans les roches cristallines et paléo-mésozoiques, l'un des plus beaux défilés du pays.

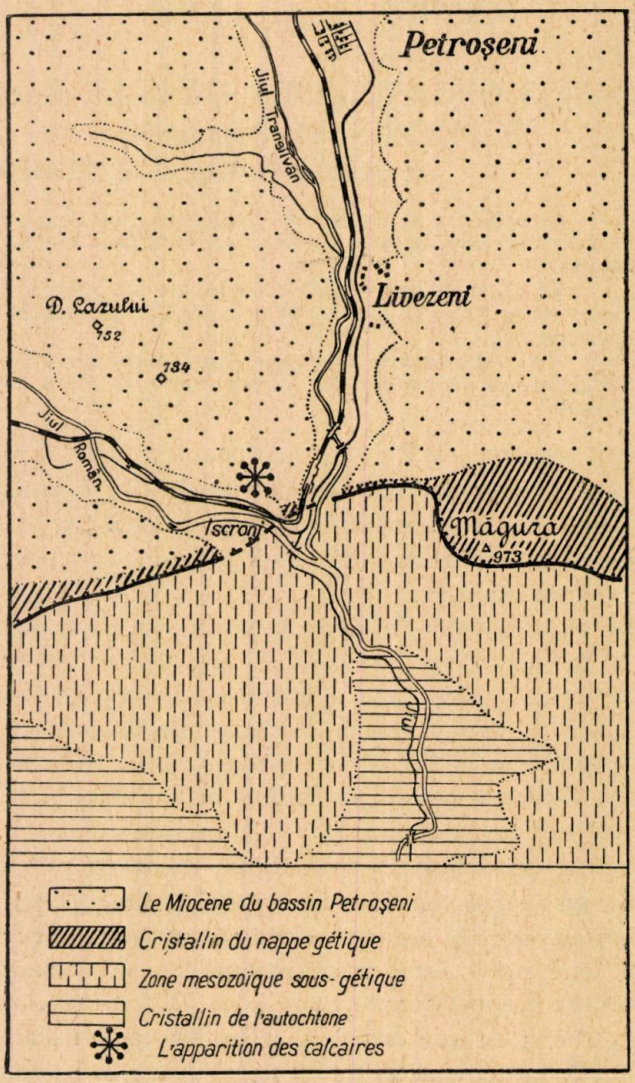
Au nord du confluent des deux bras du Jiul et de la région où le chemin de fer contourne le Dealul Lazului (cotes 752 m., 734 m.) se dirigeant vers Lupeni, nous avons trouvé, lors d'une excursion faite pendant l'été 1936, sous la conduite du Professeur Macovei, avec les étudiants de la Faculté des Mines de la Polytechnique de Bucarest, des *calcaires organogènes*. Les affleurements se trouvent sur le versant sud de la colline (voir l'esquisse).

L'apparition des calcaires sous forme de blocs est susceptible de discussion en ce qui concerne leur position stratigraphique.

En effet, comme les affleurements se trouvent dans le voisinnage de la zone mésozoïque sous-gétique, on se demande si par hasard ces blocs n'appartiennent pas à ce Mésozoïque. En envisageant les relations de ces calcaires avec les roches sous-gétiques, nous arrivons à la conclusion qu'ils ne peuvent pas appartenir au sédimentaire sous-gétique.

Si nous essayons de leur trouver une place dans la série mésozoïque supra-gétique, on se heurte à des difficultés encore plus grandes, de pareils sédiments manquant dans la région; les sédiments

du bassin Petroseni reposent directement sur le cristallin de la nappe gétique. Nous ne pouvons d'autre part admettre que nous nous trouvons en présence de roches mésozoïques — indifféremment de l'étage auquel elles appartiendraient, — vu que ces calcaires sont directement supportés par les dépôts miocènes du bassin et qu'une position anormale ne saurait être envisagée.



Un fait reste précis, c'est que les calcaires organogènes de Livezeni occupent une position normale au-dessus des dépôts aquitaniens; leur âge doit donc être plus récent que celui de l'Aquitanien, ou tout au plus synchrone. Cependant l'Aquitanien ne con-

tient pas, parmi ses sédiments, de pareils calcaires; pour ce motif l'idée d'un âge aquitanien est exclue. Il reste à voir avec quels dépôts post-aquitaniens nous pouvons comparer les calcaires organogènes de Livezeni.

Lors d'une analyse détaillée des calcaires, nous observons — en dehors de coquilles de lamellibranches et gasteropodes — de nombreux restes de Lithothamnium. Or, la présence de calcaires à Lithothamnium est connue comme étant caractéristique au Méditerranéen supérieur (Tortonien).

Des calcaires phytogènes apparaissent partout dans les régions couverts par le Miocène de la cuvette transylvaine et dans les bassins intra-montagneux se trouvant autour de cette cuvette. Ils sont connus dans le bassin miocène de Brad-Secărâmb. En 1933 je les ai découverts dans le bassin Glod, bien développés dans le Dealul Fidecului (Almaşul Mare). L'année suivante je les ai retrouvés aussi dans le bassin Zlatna, où jusqu'alors des dépôts appartenant au Méditerranéen supérieur n'étaient pas connus. Dans les deux bassins, les calcaires à Lithothamnium sont accompagnés de restes organiques *(Pecten malvinae, Picnodonta cochlear)*, qui passent aussi dans le Méditerranéen supérieur.

Dans le bassin Haţeg, l'extension des dépôts tortoniens est beaucoup plus grande, leur présence étant appuyée par les formes suivantes:

Pectunculus pilosus L.
Picnodonta cochlear POLI.
Turritella turris BAST.
Conus dujardini DESH.
Ancillaria glandiformis LAM.

De faunes semblables mais beaucoup plus riches caractérisent aussi le Tortonien déposé autour des Monts Apuseni.

De ce qui précède, il résulte que les dépôts tortoniens se trouvent dans tous les bassins miocènes, en association avec les dépôts aquitaniens. Ces derniers sont représentés par des conglomérats grès, argiles pour la plupart de couleur rouge et d'origine continentale, et occupent la plus grande partie de ces bassins.

Dans le bassin Petroşeni, on connaissait l'Aquitanien représenté par des dépôts continentaux et des dépôts marins. L'âge des dépôts marins du bassin Petroşeni est précisé par les mollusques suivants:

Cerithium margaritaceum BROC.
Ostrea crassisima LAM.
Mytilus haidingeri HOERN.

La présence des calcaires à Lithothamnium dans le Tortonien de la bordure des Monts Apuseni est une indication assez précise

que le même Tortonien se trouve aussi dans le bassin Petroşeni. L'étroite liaison entre les dépôts aquitaniens des bassins internes et les dépôts tortoniens était un fait connu en ce qui concerne la majorité de ces bassins; à la suite de la découverte des calcaires phytogènes de Livezeni, le bassin Petroşeni n'est plus une exception en ce qui concerne la sédimentation dans les bassins miocènes intra-montagneux.

Vu la présence du Tortonien dans le bassin Petroşeni, il faut voir l'extension de ces dépôts. Il faut tenir compte à ce point de vue du fait qu'une bonne partie des fossiles trouvés dans l'Aquitanien de Petroşeni, se rencontrent aussi dans le Méditerranéen supérieur du bassin de Haţeg, du bassin de Brad-Secărâmb ainsi que de la cuvette transylvaine.

En résumé, la présence des calcaires à Lithothamnium de Livezeni prouve que la sédimentation dans le bassin Petroşeni a eu lieu dans les mêmes conditions que dans les autres bassins miocènes intra-montagneux. La sédimentation dans ces bassins a commencé par les dépôts rouges continentaux de l'Aquitanien qui ont été suivis par les dépôts transgressifs du Tortonien.

Les dépôts tortoniens du bassin Petroşeni doivent avoir une extension beaucoup plus grande que celle indiquée aujourd'hui par les calcaires fossilifères de Livezeni; le problème qui se pose c'est donc de suivre ces dépôts dans leur éparpillement sur toute l'étendue du bassin Petroşeni.

BIBLIOGRAPHIE

Fr. Nopcsa. — Zur Geologie der Gegend zwischen Gyulafehérvàr, Déva, Ruszkabánya und der Rumänischen Landesgranze.
Mitt. a. d. Jahrb. d. K. ung. geol. Anstalt, Band IV. Budapest, 1905.

I. P. Voiteşti. — Le bassin de Petroşani dans le cadre géologique des dépressions carpathiques internes.
Bul. Soc. Rom. Geol. Vol. I Bucureşti, 1932.
Vo. I. Bucureşti, 1932.

Mircea D. Ilie. — Les calcaires phitogènes dans le bassins méditéranéen de Glod.
C. R des séances de l'Inst. de Geol. Rom. Tome XVII, Bucureşti 1936.

Mircea D. Ilie. — Structure géologique de la région aurifère de Zlatna (Roumanie)
An. Inst. Géol. Rom. Vol. XX. Bucarest, 1940,

G Manolescu. — Studiu geologic şi petrografic al regiunei Văii Jiului.
Memoriile secţiunei ştinţifice. Academia Română. Seria III
Tom. XII. 1937.

591.4 ANATOMIE MORPHOLOGIQUE

RECHERCHES ANATOMIQUES SUR LES ARTÈRES LES VEINES ET LES CONDUITS BILIAIRES INTRA-HÉPATIQUES CHEZ LE CHAT.

par le **Dr. Vladuţiu Octave**

Par plusieurs méthodes de travail nous avons recherché sur un nombre de 32 chats les ramifications intra-hépatiques des artères, des veines et des conduits biliaires. Nous décrivons la distribution topographique de ces ramifications dans les lobes du foie, ainsi que les rapports qui existent entre les ramifications de la veine porte, de l'artère hépatique, des veines sus-hépatiques et des conduits biliaires.

Les ramifications artérielles, veineuses et biliaires intra-hépatiques de nos animaux domestiques on été peu étudiées. Les très sommaires indications que nous trouvons dans les traités d'anatomie comparée [1]) se résument presque toutes à la description des troncs extrahépatiques et à la vascularisation du lobule hépatique. Dans l'anatomie humaine [2]) cependant ces ramifications sont très bien connues, fait qui apporte une contribution importante à la compréhension des différents processus pathologiques localisés dans le foie.

Chez les animaux les processus pathologiques localisés dans le foie sont nombreux mais l'exploration de cet organe, différemment de l'homme, rencontre des difficultés très grandes. Parmi les animaux domestiques, le chat et le chien peuvent être soumis à un examen plus approfondi complété aussi par l'examen radiologique. Ces considérations nous ont dirigé vers l'étude anatomique et radiologique du foie en pensant qu'il sera assez intéressant autant du point de vue scientifique que du point de vue pratique.

Nous avons entrepris une série de recherches sur les ramifi-

1) Bossi, Caradonna, Valardi, Zimmerl — Trattato di anatomia Veterinaria. 1909. Ellenberger v. Baum — Handbuch der Vergleichenden Anatomie der Hausthiere 1932. F. X. Lesbre — Précis d'anatomie comparée des animaux domestiques. Tome I 1923. Navez — Précis d'anatomie comparée des animaux domestiques, autres que le cheval. 1921.

2) L. Testut — Traité d'anatomie humaine. Tome IV.1923.

cations intra-hépatiques des artères, des veines et des conduits biliaires. Nos recherches ont porté sur un nombre de 32 chats de différents âges. Nous avons employé comme méthode de travail la dissection, la corrosion et la radiographie.

La dissection a été faite sur des organes frais et sur des organes fixés au formol, dont les vaisseaux et les conduits biliaires ont été injectés avec une émulsion huileuse de minium. Elle nous a permis d'établir la topographie des troncs extra-hépatiques, sans nous donner tout-de-même une image complète des ramifications de l'intérieur du foie.

La corrosion a été la seule méthode qui nous a permis d'étudier les ramifications intrinsèques du foie, jusqu'aux plus fines divisions. Elle est une méthode difficile à appliquer car le foie est un organe dont les ramifications sont très fines et très abondantes. La substance organique détruite par la corrosion emporte souvent avec elle, au moment de l'écartement, les ramifications artèrielles et veineuses plus fines, détruisant ainsi la pièce. Pour injecter les vaisseaux et les conduits biliaires, nous avons employé une solution de 10—15% de celluloïd dans l'acétone et comme substance corrosive. l'acide chlorhydrique technique. La corrosion s'est produite dans 7—8 jours.

La radiographie nous a donné de bonnes images seulement concernant la topographie des troncs et des grands collecteurs. Par la radiographie nous pouvons établir les rapports qui existent entre les grands troncs des artères, des veines et des canaux biliaires, appartenant à chaque lobe. Nous ne pouvons pas obtenir une image radiologique complète des ramifications fines, comme nous obtenons par la corrosion, car les ramifications des différents plans se superposent et donnent occasion toujours à la confusion dans l'appréciation. La substance opaque que nous avons employée a été une suspension dans l'eau de carbonate de calcium ou de baryum, ou bien une émulsion huileuse de minium avec de la sulfure de carbone.

Nos recherches nous ont conduits aux résultats suivants:

Le foie chez le chat est un organe volumineux qui pèse en moyenne 150—250 grammes. Il présente des scissures profondes qui le divisent dans les lobes suivants: le lobe gauche, le lobe droit, le lobe médian gauche, le lobe médian droit, divisé par la vésicule biliaire dans une portion interne et une portion externe et le lobe de Spigel.

Les vaisseaux afférents sont formés par la *veine porte* et *l'ar-*

tère hépatique et les vaisseaux efférents par les *veines sus-hépatiques*, auquelles nous ajoutons les *canaux biliaires*.

La veine porte, resultée de l'union de la grande et de la petite veine mésentérique avec la veine gastro-splénique, une fois arrivée vers la face postérieure du foie, au niveau du hile, se divise en deux rameaux très divergents, l'un gauche, *la veine hépatique gauche* et l'autre droit, *la veine hépatique droite*.

La veine hépatique droite (fig. 1) est la plus courte. Elle se dirige à droite et en haut, vers le fond de la scissure qui sépare le lobe de Spigel du lobe droit. Au niveau de cette scissure elle se divise en deux rameaux, l'un destiné au lobe de Spigel et l'autre au lobe droit. Dès qu'ils pénètrent dans les lobes, ces rameaux se divisent plus ou moins régulièrement, d'après le système dichotomique, en collatérales de plus en plus petites, jusqu'aux divisions interlobulaires.

La veine hépatique gauche (fig. 1) plus grande et plus longue que celle droite, se dirige à gauche et en bas. Après un court trajet extra-hépatique elle se divise en un rameau gauche et un rameau inférieur.

Le rameau gauche, adhérent à la face postérieure du foie, se dirige obliquement en dehors et en bas, vers le fond de la scissure qui sépare le lobe gauche du lobe médian gauche. Il émet des collatérales pour le lobe de Spigel (portion papillaire) et pour le lobe médian droit (portion interne) et finit au niveau de cette scissure par quatre rameaux, les uns destinés au lobe gauche, les autres au lobe médian gauche. Chacun de ces rameaux émet sur son trajet des nombreuses collatérales qui se divisent dichotomiques en rameaux de plus en plus fins, jusqu'aux divisions interlobulaires.

Le rameau inférieur de la veine hépatique gauche se dirige obliquement en bas, un peu en dehors et en avant, parallèlement au canal cystique, vers le sommet de l'échancrure qui abrite la vésicule biliaire. Après un court trajet extra-hépatique ce rameau pénètre dans la portion externe du lobe médian droit, qu'il traverse et finit par des ramifications de plus en plus fines. Il émet plusieurs collatérales pour la portion externe du lobe médian droit et reçoit la veine cystique.

L'artère hépatique (fig. 4) suit la même voie que la veine porte. Au niveau du hile elle se divise en deux rameaux inégaux, l'un gauche plus volumineux et plus long et l'autre droit plus petit et plus court.

Le rameau gauche de l'artère hépatique suit le même trajet et présente les même divisions que le rameau gauche de la veine hépatique gauche qu'il accompagne. Sur son trajet extra-hépatique il émet des collatérales pour le lobe de Spigel (portion papillaire) et pour la portion interne du lobe médian droit. Il émet aussi quelques collatérales pour la capsule fibreuse des 3 lobes du foie.

Le rameau droit de l'artère hépatique a un trajet dirigé obliquement en bas et en dehors. Il finit par deux rameaux: l'un accompagne la veine hépatique droite, destiné au lobe de Spigel et au lobe droit, l'autre accompagne le rameau inférieur de la veine hépatique gauche, destiné au lobe médian droit et à la vésicule biliaire. Pour la vésicule biliaire il émet 2 collatérales: *l'artère cystique postérieure*, destinée à la face postérieure de la vésicule et *l'artère cystique antérieure*, destinée à la face antérieure de la vésicule. Les deux artères s'anastomosent par leurs ramifications terminales au fond de la vésicule.

Le système artériel accompagne fidèlement toutes les ramifications de la veine porte. On remarque souvent soit par la corrosion, soit par la radiographie qu'un rameau veineux est accompagné par deux artères inégales unies l'une à l'autre par des anastomoses transversales ou obliques. Le calibre des artères est beaucoup plus réduit que celui des veines ou des canaux biliaires (fig. 4 et 5).

Les veines sus-hépatiques ont l'origine à l'intérieur du foie et forment les vaisseaux efférents du lobule hépatique. Le sang porté au lobule hépatique par les dernières divisions de la veine porte et de l'artère hépatique se verse dans la *veine intralobulaire*. Une fois sorties des lobules ces veines forment les *veines sus-lobulaires*, qui se jettent dans les collecteurs de plus en plus grands, nommés *veines sus-hépatiques*. Les veines sus-hépatiques, d'un calibre très variable, parcourent le parenchyme du foie avec un trajet radiaire, qui convergent de la périphérie vers l'échancrure du bord supérieur du foie. Ici elles s'ouvrent dans la veine cave par des nombreux troncs. La plupart des troncs sont petits, cependant nous pouvons distinguer parmi eux, de plus grands, tels que: *la veine sus-hépatique droite, la veine sus-hépatique gauche, la veine sus-hépatique médiane gauche, la veine sus-hépatique médiane droite* (fig. 2).

La veine sus-hépatique droite (fig. 2) résulte de la confluence des deux troncs qui apportent le sang du lobe de Spigel (p. caudé) et du lobe droit.

La veine sus-hépatique médiane droite (fig. 2) d'un grand calibre, parcourt toute la longueur du lobe médian droit. Elle a une direction oblique de bas en haut, du dehors en dedans et d'arrière en avant, avec des nombreux affluents.

La veine sus-hépatique médiane gauche (fig. 2) résulte de la confluence des 2 troncs, l'un gauche et l'autre droit. Le tronc gauche apporte le sang de la partie interne du lobe médian droit et le tronc droit l'apporte de la partie externe du lobe médian droit.

La veine sus-hépatique gauche (fig. 2), courte mais d'un grand calibre, résulte de la confluence des 2 troncs, l'un supérieur, destiné au lobe gauche et l'autre inférieur, destiné au lobe médian gauche.

A part ces veines sus-hépatiques, on trouve aussi des nombreuses veines plus petites, qui s'ouvrent directement dans la veine cave postérieure et qui apportent le sang, dans la plus grande partie, du lobe de Spigel (port. papillaire).

Les canaux biliaires intra-hépatiques prennent naissance des canalicules biliaires, à l'intérieur du lobule hépatique. Ces canalicules se continuent vers la périphérie du lobule par des canaux biliaires interlobulaires, qui forment de vrais réseaux autour des lobules. De ces réseaux partiront les canaux biliaires proprement dits, qui tous se dirigent vers le hile du foie. Les canaux biliaires dans leur trajet vers le hile s'unissent les uns aux autres de telle façon, qu'au niveau du hile nous pouvons distinguer 2 troncs principaux: *le canal hépatique gauche et le canal hépatique droit* (fig. 3).

Le canal hépatique gauche (fig. 3), le plus long, résulte de la confluence des 4 troncs, qui collectent la bile du lobe gauche et du lobe médian gauche, et de quelques canaux qui viennent du lobe médian droit et du lobe de Spigel (portion papillaire).

Le canal hépatique droit (fig. 3), beaucoup plus court, résulte de la confluence de 2 grands troncs, l'un supéro-externe, l'autre inférieur. Le tronc supéro-externe collecte la bile du lobe de Spigel (portion caudé) et du lobe droit. Le tronc inférieur, beaucoup plus grand, parcourt toute la longueur de la portion externe du lobe médian droit et collecte la bile de ce lobe et de la portion interne du lobe médian droit et du lobe de Spigel (portion papillaire). Au niveau du hile les deux canaux hépatiques s'unissent avec le canal cystique de la vésicule biliaire formant le canal cholédoque.

La vésicule biliaire (fig. 3 et 5) est un réservoir piriforme, placé dans l'échancrure des 2 portions du lobe médian droit. Son fond est placé dans la partie inférieure et ne touche pas le bord inférieur

du foie. Elle se prolonge par le canal cystique, qui est très sinueux. Le canal cystique se dirige en haut vers le hile du foie où, une fois arrivé entre les 2 canaux hépatiques, s'unit avec elles et forme le canal cholédoque.

Chez le chat, on remarque fréquemment une vésicule biliaire sur-numéraire, beaucoup plus petite et avec le canal cystique plus fin et moins flexible. Elle est placée habituellement à droite de la vésicule biliaire normale et son canal cystique s'ouvre dans le tronc inférieur du canal hépatique droit (fig. 5).

* * *

Les divisions intra-hépatiques de la veine porte sont accompagnées toujours par des artères et des canaux biliaires et sont enveloppées toutes par une gaine conjonctive, qui forme dans le parenchyme du foie des vrais cordons, qui convergent de la périphérie vers le hile (fig. 6).

Les divisions des veines sus-hépatiques ne présentent pas des rapports intimes avec les divisions de la veine porte, de l'artère hépatique et des canaux biliaires. Elles forment un réseau vasculaire qui occupe la partie de la face antérieure du foie tandisque, le réseau de la veine porte occupe la partie de la face postérieure.

Les grands troncs du système porte et du système sus-hépatique sont placés donc l'un en face de l'autre, mais leur direction ne peut pas être superposée parfaitement. On trouve des veines sus-hépatiques qui dans leur trajet s'entrecoupent avec les divisions de la veine porte ou reviennent même dans un plan plus rapproché à la face postérieure qu'à celle antérieure (fig. 1).

Les troncs des veines sus-hépatiques habituellement ne sont pas accompagnés dans leur trajet par d'autres vaisseaux et ne s'anastomosent pas entre eux.

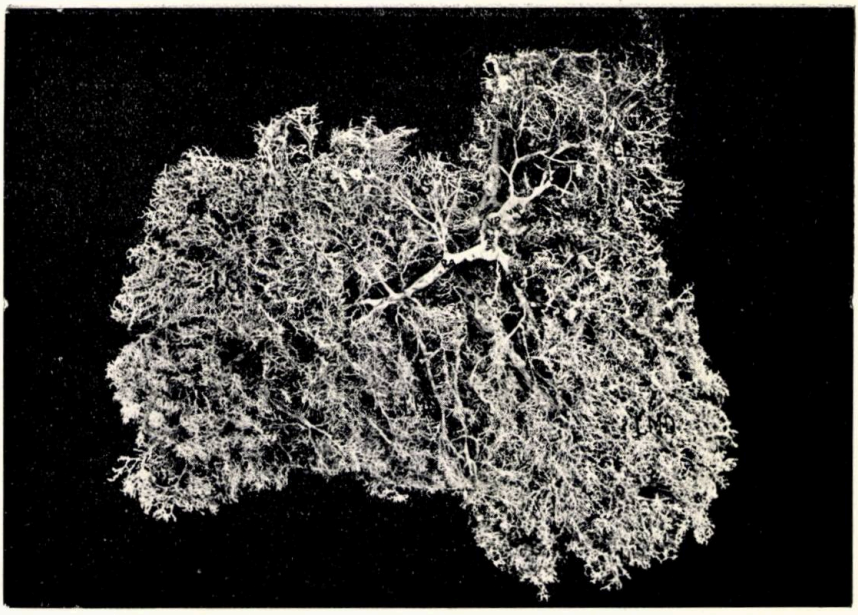


Fig. 1. Les ramifications intra-hépatiques de la veine porte et des veines sus-hépatiques. Injection avec celluloïd et corrosion. (Photographie).

Fig. 2. Les ramifications intra-hépatiques des veines sus-hépatiques. Injection avec celluloïd et corrosion (Photographie).

VP, veine porte ; VHG, veine hépatique gauche ; VHD, veine hépatique droite ; VCP, veine cave postérieure ; VSD, veine sus-hépatique droite ; VSMD, veine sus-hépatique médiane droite ; VSMG, veine sus-hépatique médiane gauche ; VSG, veine sus-hépatique gauche ; LS, lobe de Spigel ; LD, lobe droit ; LMD, lobe médian droit ; LMG, lobe médian gauche ; LG, lobe gauche.

Fig. 3. Les ramifications intra-hépatiques des canaux biliaires. Injection avec celluloïd et corrosion (Photographie).

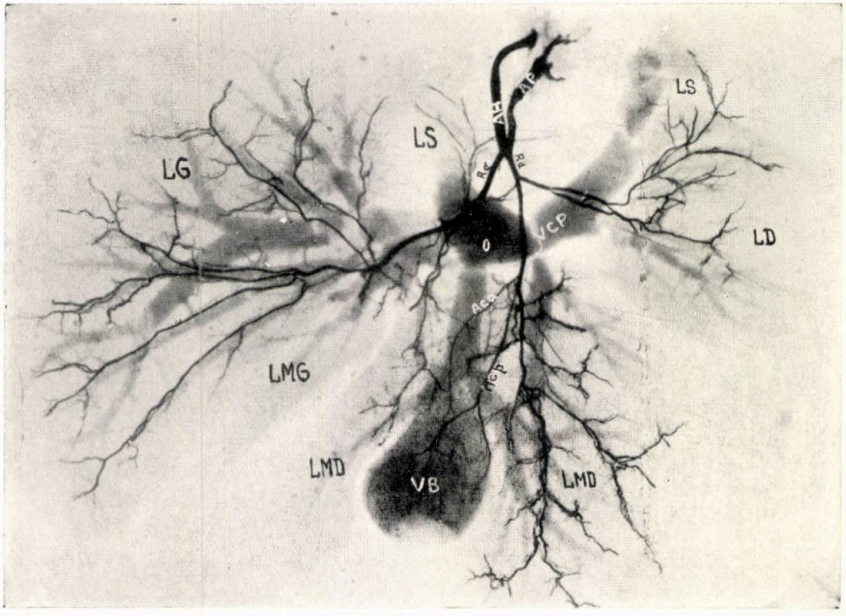


Fig. 4. Les ramifications intra-hépatiques de l'artère hépatique et de la veine sus-hépatique (Radiographie).

VB, vésicule biliaire ; CC, canal cystique ; CHG, canal hépatique gauche ; CHD, canal hépatique droit ; CO, canal cholédoque ; AH, artère hépatique ; Rd, rameau droit de l'artère hépatique ; Reg. rameau gauche de l'artère hépatique ; AP, artère pylorique ; Aca, artère cystique antérieure ; Acp, artère cystique postérieure.

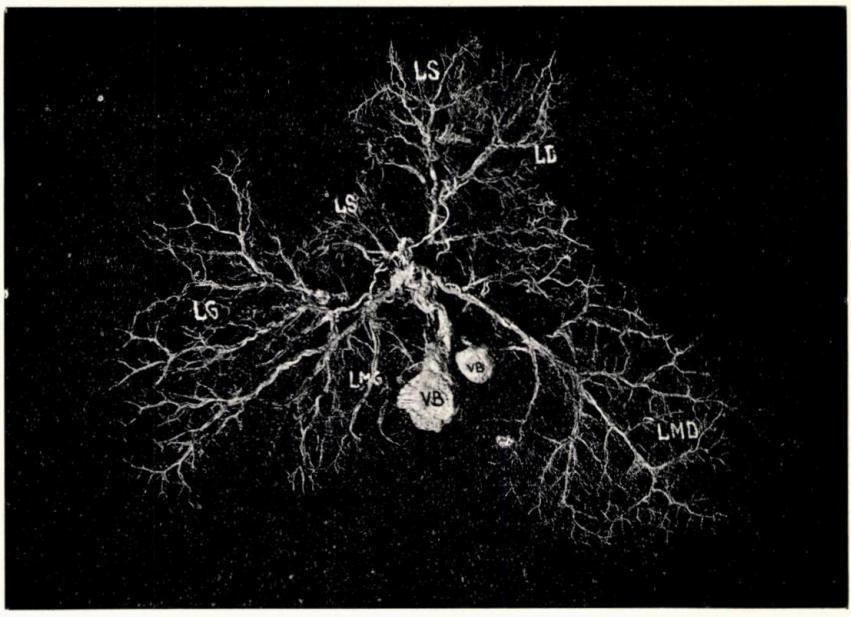


Fig. 5. Les ramifications intra-hépatiques de l'artère hépatique et des canaux biliaires. Injection avec celluloïd et corrosion (Photographie).

— On remarque une vésicule biliaire surnuméraire et un rapport intime entre les artères et les canaux biliaires.

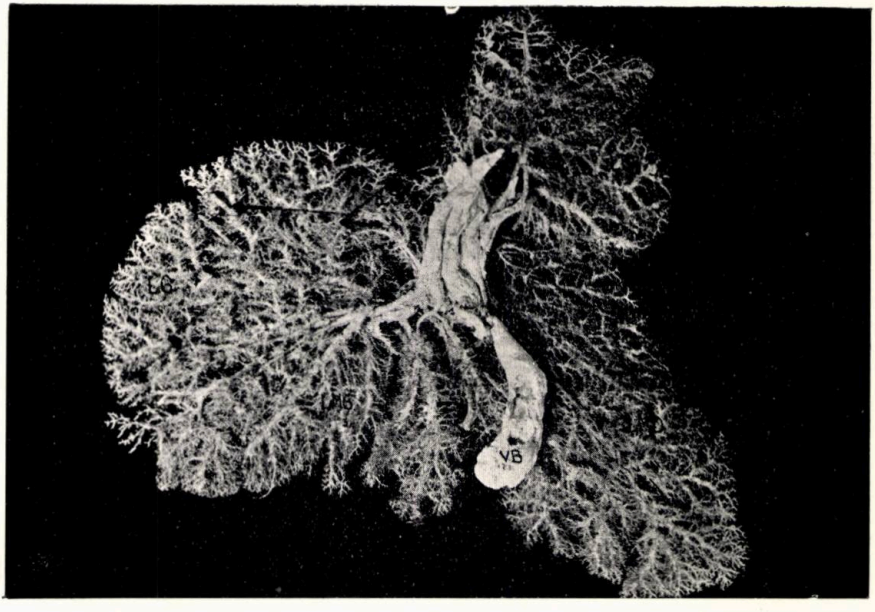


Fig. 6. Les ramifications intra-hépatiques de la veine porte, de l'artère hépatique et des canaux biliaires. Injection avec celuloïd et corrosion (Photographie).

— On remarque un rapport intime entre les veines, les artères et les conduits biliaires, qui forment des cordons dans le parenchyme du foie et qui convergent vers le hile.

620.1 ESSAIS DES MATÉRIAUX

DIE BEZIEHUNG ZWISCHEN DEM QUELLEN UND DER WASSERAUFNAHME DES ZEMENTMÖRTELS

Von **C. C. Teodorescu**

Zusammenfassung. *Durch Längen-und Gewichtsmessungen ist die Beziehung zwischen dem Quellen unter Wasser und der Wasseraufnahme verschiedener Zementmörtel, für eine längere Zeitspanne, untersucht. Es hat sich herausgestellt, dass reine und fette Zementmörtel dieselbe Beziehung aufweisen, während magere Zementmörtel sich anders verhalten, indem diese kleinere Längenänderungen mit grösserer Wasseraufnahme zeigen.*

Dass Zementmörtel unter Wasser quellt, ist schon lange allgemein bekannt, und es liegt die Vermutung nahe, dass das Quellen in eine gewisse Verbindung mit der Wasseraufnahme sein soll. Wenn man eine Probe Zementmörtel nach der Bindezeit ins Wasser lagert, so wächst das Gewicht der Probe und es wird so viel Wasser aufgenommen, bis es zu einen Sättigungspunkt kommt, wo die Poren ganz aufgefüllt sind. Zugleich mit der Wasseraufnahme tritt das Quellen auf, also eine Formveränderung, wobei meistens die lineare Veränderung studiert wurde.

In Anlehnung an frühere Arbeiten über das Schwinden des Zementmörtels, habe ich mir die Aufgabe gestellt, die Beziehung zwischen dem Quellen und der Wasseraufnahme des Zementmörtels durch Längen-und Gewichtsmessungen zu untersuchen.

Es wurden fünf Portlandzemente *A, B, C, D, E,* in verschiedenen sechs Mischungsverhältnissen mit Normalsand, untersucht:

1. Reiner Zement mit 27% Wasser
2. 3 G. T. Zement: 1 Normalsand mit 20% Wasser
3. 3 G. T. Zement: 1 Normalsand mit 18,5% Wasser
4. 1 G. T. Zement: 1 Normalsand mit 13,4% Wasser
5. 1 G. T. Zement: 2 Normalsand mit 11,7% Wasser
6. 1 G. T. Zement: 3 Normalsand mit 9,17% Wasser

Man verfolgte in dieser Weise $6 \times 5 = 30$ Serien, und jedes Resultat ist ein Mittelwert von fünf gleichen Einzelproben.

Die Proben sind Zementmörtelprismen von $10 \times 10 \times 500$ mm. Diese langen und sehr schmalen Proben sind nach mehreren Ver-

suche so gewählt worden, um die Messung der linearen Veränderung leichter zu gestalten, und die inneren Spannungen auf das kleinste Mass zu beschränken. Die Handhabung der schmalen Proben muss sehr vorsichtig durchgeführt werden, sonst können diese abbrechen.

Der Längenmessapparat, ein Komparator eigener Konstruktion, bestand aus einer Stahlplatte mit zwei Kernen auf einen Abstand von 500 mm geeicht, und die Messung erfolgte mit einer Zeiss-Messuhr. Die Proben hatten zwei kugelig gebildete Messingstifte, so dass die Messung immer den Abstand zweier Tangentialebenen geben konnte, mit einer Genauigkeit von 0,01mm.

Das Gewicht war mit einer analytischen Wage, mit einer Genauigkeit von 0,001 g ermittelt.

Zwei Beobachter führten diese Messungen, zu gleicher Zeit aus. Die Proben waren aus dem Wasser herausgenommen, geneigt aufgelegt um das Wasser durchrieseln zu lassen, leicht auf Löschpapier gedrückt um das Wasser zu entfernen, dann gemessen und gewogen.

Die Beobachtung der Längen und Gewichte erfolgte in den ersten 15 Tage täglich, in den nächsten 12 Wochen wöchentlich, und weiter monatlich, so dass im Ganzen die Arbeit 420 Tage verfolgt wurde. Für jede Serie stehen uns 37 Paarwerte zur Verfügung.

Aus der Längenmessung ist das Quellen in mm/m, das ist in Tausendstel berechnet. Als Anfangsmessung galt die erste Messung, sofort nach dem Entformen, 24 Stunden nach der Anfertigung der Proben.

Die Wasseraufnahme ist in Prozenten berechnet. Alle Berechnungen sind auf die Anfangsmessung bezogen.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind in der Abb. 1 wiedergegeben, wo in Abszissen das Quellen in Tausendstel, in Ordinaten aber die Wasseraufnahme in % gegeben sind. Zwei Paarwerte geben einen Punkt, und die verschiedenen Punkte für eine gewisse Serie, mit der Zeit verfolgt, sind durch eine Linie verbunden. Die Buchstaben geben uns die Zementart, die Indices das Mischungsverhältnis, nach oben gegebenem Schema.

Wie man aus der Abbildung sofort sehen kann, ist der Verlauf der Kurven sehr regelmässig, und die verschiedenen Serien zeigen deutlich eine enge Beziehung zwischen dem Quellen und der Wasseraufnahme. Die Serien mit den Indices 1 weisen grössere Längenänderungen, wovon C_1 die grösste, und diese Serien entsprechen den reinen Zementmörtel, der obwohl sehr dicht geschlagen, jedoch eine grosse Wasseraufnahme zeigt, und so einen ent-

sprechend grossen Poreninhalt aufweist. Die anderen Serien, mit immer grösseren Sandanteil, geben verschiedene Kurven die sich ganz mit den anderen decken, und beweisen dass diese Beziehung von dem Mischungsverhältnis ziemlich unabhängig ist.

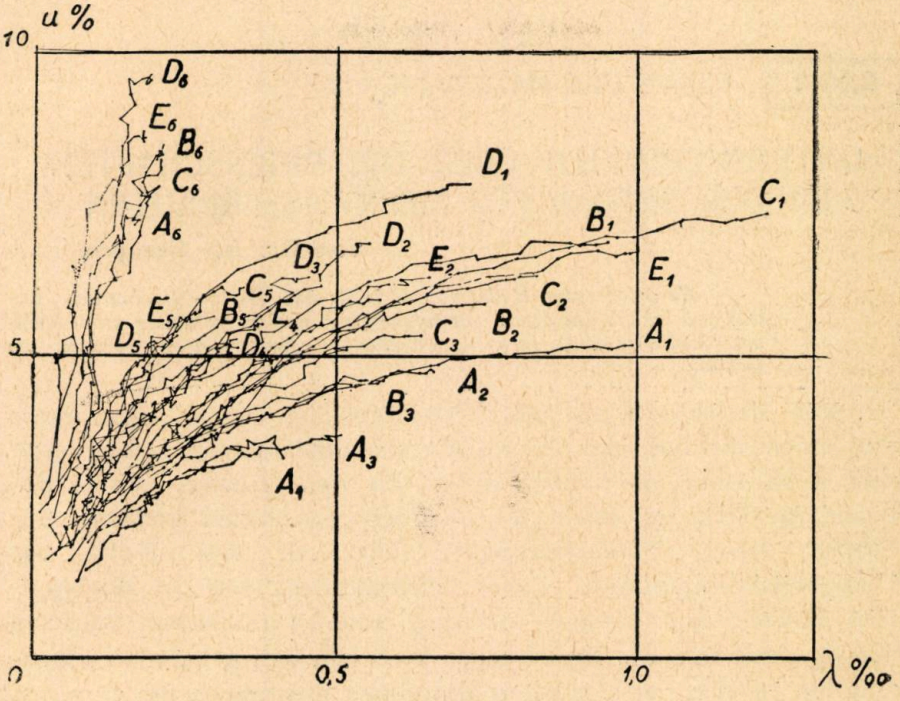


Abb. 1.

Die grösste Wasseraufnahme für diese Serien ist 5—8% und scheint nach längerer Zeit konstant zu sein, so dass ein inneres Gleichgewicht schon erreicht ist. Die Längenänderung ist aber noch im Wachsen.

Einen eigentümlichen Verlauf zeigen die Serien 6, aus mageren Zementmörtel, wo man 1 G. T. Zement mit 3 Normalsand gemischt hat. Diese Serien, die sich für alle Zementsorten zusammen überdecken, haben kleinere Längenänderungen und grössere Wasseraufnahme.

Die grösste Wasseraufnahme für diese Serien ist bis 10%, und die letzten Messungen geben dieselben Werte, sodass ein inneres Gleichgewicht besteht, das uns dieselben Gewichte und Längen gibt.

620.1 ESSAIS DES MATÉRIAUX.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN EINIGER BETONE FÜR MEERWASSERBAUTEN

von Dr. **A. Steopoe**

Es wurde eine Reihe von Mörtel- und Beton-Mischungen betreffend Druckfestigkeit, Biegefestigkeit und Schwindung untersucht, um Schlüsse über ihre Verwendbarkeit für Meerwasserbauten zu ziehen.

Für die Herstellung von Wellenbrechern braucht man nicht nur einen dichten und chemisch-widerstandsfähigen Beton, sondern auch einen mechanisch-festen, da diese Blöcke, infolge der Brandung-Wirkung, stark in Anspruch genommen werden. Auf Grund dieser Voraussetzungen, habe ich eine Reihe von Festigkeitsbestimmungen, sowie Schwindmessungen bei Bindemitteln, Mörteln und Betonen, mit und ohne hydraulischen Zusätzen durchgeführt und die Beziehungen zwischen den genannten Eigenschaften bei den verschiedenen Materialen untersucht, um zu sehen ob die Prüfung der Mörtel genügt, um Schlüsse über das Verhalten der entsprechenden Betone ziehen zu können. In der vorliegenden Arbeit werde ich die Ergebnisse dieser Untersuchungen darstellen.

Arbeitsmaterial und Arbeitsweise. — Für diese Untersuchungen standen mir die folgenden Materialen zur Verfügung:

a. Kalksteinschlag, durch das Sieb mit 30mm Lochdurchmesser abgesiebt.

b. Grubensand aus Dobrogea.

c. Donausand.

d. Ein kieselsäurereicher, für Meerwasserbauten spezieller Portlandzement aus Cernavoda.

e. Santorinerde.

f. Feingemahlener Trass aus Dej (Siebenbürgen).

g. Kalkteig.

Der Feuchtigkeitsgehalt der Zuschlagstoffe wurde mit 2 kg Material im Anlieferungszustand für den Kalksteinschlag und den Sand, und mit 1 kg Material nach Luft-Trocknung für die Santo-

rinerde bestimmt. Die erhaltenen Mittelwerte aus zwei übereinstimmenden Bestimmungen sind die folgenden:

Kalksteinschlag	2,75%
Grubensand	1,50 „
Donausand	2,32 „
Santorinerde	11,90 „

Die Raumgewichte und die Hohlräume dieser Materialen, sowie der Mischungen aus Kalksteinschlag und Sand wurden mit dem 5L.—Gefäss für den Kalksteinschlag und seine Mischungen, mit dem 2 L.—Gefäss für die Santorinerde und mit dem 1 L.—Gefäss für den Sand bestimmt. Die erhaltenen Mittelwerte aus zwei übereinstimmenden Bestimmungen sind in der Tafel Nr. 1 angeführt.

TAFEL Nr. 1

Materialart.	Raumgewicht g/L	Hohlräume $cm^3/\%$
Kalksteinschlag	1366	47,6
Grubensand	1368	43,2
Donausand	1147	51,7
Santorinerde	786	48,2
1 Gw. Tl. Grubensand + 2 Gw. Tl. Kalksteinschlag	1616	32,7
1 Gw. Tl Donausand + 2 Gw. Tl. Kalksteinschlag	1709	30,6
0,5 Gw. Tl. Grubensand + 0,5 Gw. Tl. Donausand + 2 Gw. Tl. Kalksteinschlag . . .	1650	32,7

Die Kornzusammensetzung der Materialen wurde mit 5kg Kalksteinschlag, bzw. 1kg Sand oder Santorinerde bestimmt und aus den erhaltenen Ergebnissen, die Kornzusammensetzung der Mischungen berechnet. Die erhaltenen Werte sind in der Tafel Nr. 2 rechnerisch und in der Abb. 1 graphisch dargestellt. (Alle Kurven der Mischungen sind in der schraffierten Oberfläche eingegliedert).

TAFEL Nr. 2

Maschenweite m m.	Kalksteinschlag	Grubensand	Donausand	Santorinerde	2 Tl. Kalkstein + 1 Tl. Grubensand	2 Tl. Kalkstein + 1 Tl. Donausand	4 Tl. Kalkstein + 1 Tl. Grubensand + 1 Tl. Donausand	4 Tl. Kalkstein + 1 Tl. Grubensand + 1 Tl Donausand + 0,33 Tl. Santorin	4 Tl. Kalkstein + 1 Tl. Grubensand + 1 Tl Donausand + 0,67 Tl. Santorin	4 Tl. Kalkstein + 1 Tl. Grubensand + 1 Tl Donausand + 1 Tl. Santorin
15	78,3	100,0	100,0	100,0	85,5	85,5	85,5	86,3	86,9	87,6
7	31,9	91,8	100,0	98,5	51,8	54,6	53,2	55,6	57,6	59,6
3	14,3	76,2	96,6	85,6	34,9	41,7	38,3	40,8	43,0	45,1
1	8,8	42,9	81,4	64,3	20,1	33,0	26,6	28,6	30,3	32,0
0,2	5,5	6,7	23,5	45,7	5,9	11,5	8,7	10,7	12,4	14,0

Mit diesen Materialen wurden 12 Betonmischungen hergestellt, derer Zusammensetzung in der Tafel Nr. 3 angezeigt ist. Die Arbeitsweise für die Mischungen, welche ein Bindemittel mit wenigstens 67% Zement hatten, war die folgende: aus jeder Betonmischung habe ich 6 Würfel (20cm Kantenlänge) und 6 Balken (10.10.70 cm) in zwei Schichten gestampft, welche 7 Tage unter feuchten Säcken und dann in freier Luft lagerten. Nach 28 und 56 Tagen Aufbewahrungsdauer (vom Herstellungstag berechnet) wurden je 3 Würfel und 3 Balken geprüft. Die Balken für die 56—Tage-Probe hatten axial-befestigte Metallzapfen, um ihre Schwindung zu messen.

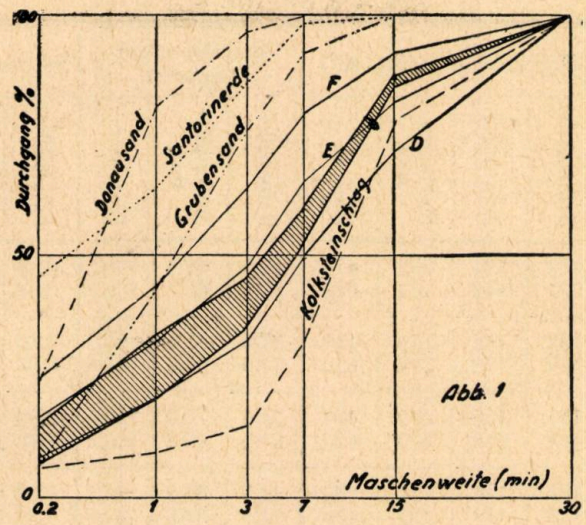
Gleichzeitig mit der Prüfung dieser Betone, habe ich die Prüfung der entsprechenden Mörtel und Bindemittel gemacht, indem

TAFEL Nr. 3

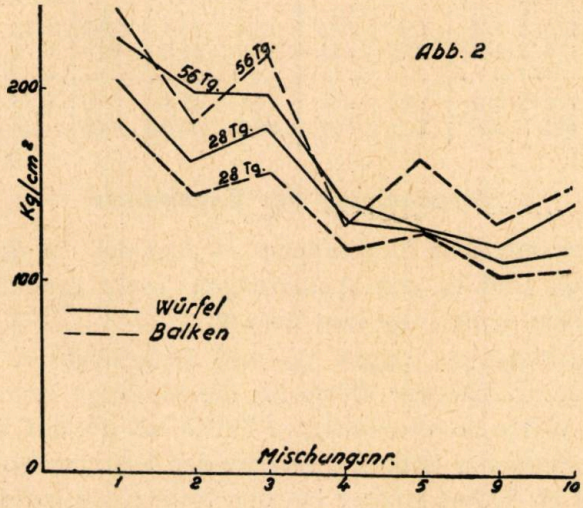
Mischungsnr	Prozentuelle Zusammensetzung der Bindemittel: Zement	Trass	Santorinerde	Kalkzusatz (Gw. Tl. Kalkpaste für 100 Tl. Bindemittel)	Gw Tl. Zuschlagstoffe für 1 Gw. Tl. Bindemittel: Grubensand	Donausand	Kalksteinschlag	Wasser : Zement	Gewicht des frischen Betons (kg/m³)
1	100	—	—	—	2	—	4	0,77	2381
2	100	—	—	—	—	2	4	0,85	2322
3	100	—	—	—	1	1	4	0,81	2344
4	67	33	—	—	1	1	4	1,37	2273
5	67	33	—	8	1	1	4	1,37	2256
6	33	67	—	11	1	1	4	2,75	2275
7	33	67	—	29,5	1	1	4	2,85	2212
8	—	100	—	50	1	1	4	—	2161
9	67	—	33	—	1	1	4	1,22	2286
10	67	—	33	8	1	1	4	1,26	2289
11	33	—	67	29,5	1	1	4	2,48	2211
12	—	—	100	50	1	1	4	—	2153

als Mörtel die Fraktion der trockenen Betonmischung (samt Zement) welche durch das Sieb mit 7 mm Lochdurchmesser hindurchgeht, und als Bindemittel, die Betonfraktion, welche durch das 900-Maschensieb hindurchgeht, genommen wurde. Die Mörtelmischungen enthielten 15% Anmachewasser (Feuchtigkeitsgehalt der Zuschlagstoff-Fraktionen einschliesslich), während die Bindemittelpasten die normale Konsistenz hatten, Die Probekörper (4.4.16 cm Prismen für die Mörtel und 2,25.2,25.10 cm. Bauschinger-Prismen für die Bindemittel) wurden in demselben Platz und in derselben Weise wie die Betonbalken aufbewahrt und geprüft, und zwar: nach 28 bzw. 56 Tagen Lagerung (in dem letzten Fall, nach der

Schwindmessung) wurde die Biegezugfestigkeit bestimmt (Einzellast in der Mitte. Stützenentfernung: 60 cm für die Balken, 10 cm für die Mörtelprismen und 8 cm für die Bauschinger-Probekörper) und auf den gebliebenen Hälften, die Druckfestigkeit ermittelt (Druckfläche: 100 cm² für Beton, 16 cm² für Mörtel und 5 cm² für Bindemittel).



Aus den Betonmischungen Nr. 6, 7, 8, 11, und 12 habe ich nur Würfel hergestellt, welche, nach 28 Tagen Lagerung unter feuchten



Säcken, und nachfolgender 28 Tagen Luftlagerung, auf Druckfestigkeit geprüft wurden. Die Betonmischung Nr. 6 wurde auch nach 7 Tagen feuchter und 49 Tagen Luftlagerung geprüft (Nr. 6 a).

Durch Wiegen der Formen vor und nach der Füllung mit Beton, habe ich das Raumgewicht des frischen Betons ermittelt.

Die erhaltenen Ergebnisse sind in der Tafel Nr. 4 für die zementreichen Mischungen und in der Tafel Nr. 5 für die anderen Mischungen angeführt.

TAFEL Nr. 4

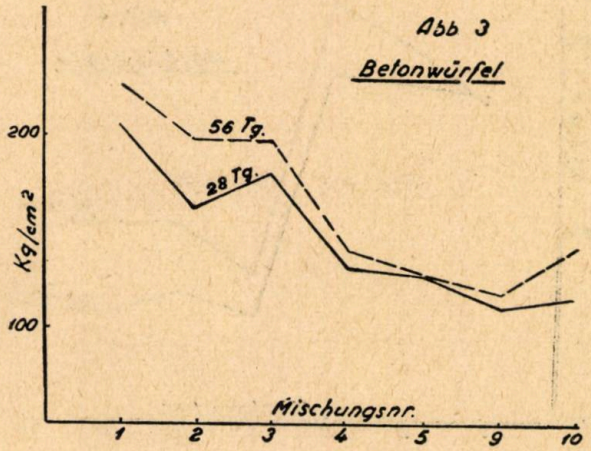
Betonmischungs-nummer	Aufbewahrungs-dauer (in Tagen)	Druckfestigkeit (kg/cm²)				Biegefestigkeit (kg/cm²)			Schwindung (mm/m)		
		Betonwürfel	Betonbalken	Mörtelprismen	Pasten	Betonbalken	Mörtelprismen	Pasten	Betonbalken	Mörtelprismen	Pasten
1	28	206	184	269	473	27,5	69,0	106,5	0,43	1,19	2,19
	56	227	242	265	620	38,0	60,7	102,7	0,68	1,47	2,74
2	28	163	145	276	448	21,3	61,5	97,7	0,46	1,23	1,97
	56	199	183	297	510	28,8	62,6	94,6	0,83	1,54	2,43
3	28	181	156	280	480	22,5	70,9	156,5	0,39	1,17	2,12
	56	198	218	320	650	31,5	66,2	100,0	0,70	1,49	2,64
4	28	132	116	154	283	11,7	40,2	72,5	0,32	1,27	2,80
	56	142	129	195	436	11,4	39,0	62,3	0,47	1,54	3,29
5	28	126	124	167	285	12,3	28,7	66,9	0,54	1,81	3,00
	56	129	165	203	425	13,5	36,7	52,2	0,73	2,12	3,57
9	28	110	102	155	325	13,7	34,3	78,2	0,42	1,10	2,50
	56	119	131	202	444	18,5	41,0	72,7	0,74	1,31	2,86
10	28	114	105	160	336	17,1	41,8	77,9	0,70	1,53	3,07
	56	142	150	215	502	20,3	40,5	64,0	1,08	1,78	3,66

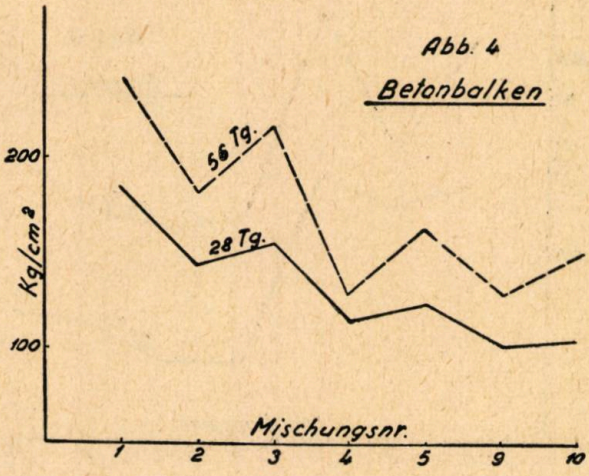
Besprechung der Ergebnisse

1. — *Zementreiche Mischungen.* — Aus den, in der Tafel Nr. 4 angeführten und in den Abbildungen 2—12 graphisch dargestellten Werten, geht folgendes hervor:

a. In allgemeinen, zeigen die auf Balkenhälften bestimmten Druckfestigkeiten kleinere Werte für die 28-tägige Probe und meistens höhere Werte für die 56-tägige Probe, als die auf Würfeln bestimmten Festigkeiten (Abb. 2), so dass der Festigkeitzuwachs zwischen 28 und 56 Tagen grösser bei den Balken als bei den Würfeln ist, infolge der kleineren Dicke der Balken, welche eine stärkere Trocknung begünstigt. Was den Einfluss der Sandart auf die Druckfestigkeit der Mischungen mit reinem Zement betrifft, so

beobachten wir, dass der Grubensand die höchste und der Donausand die niedrigste Festigkeit gibt.

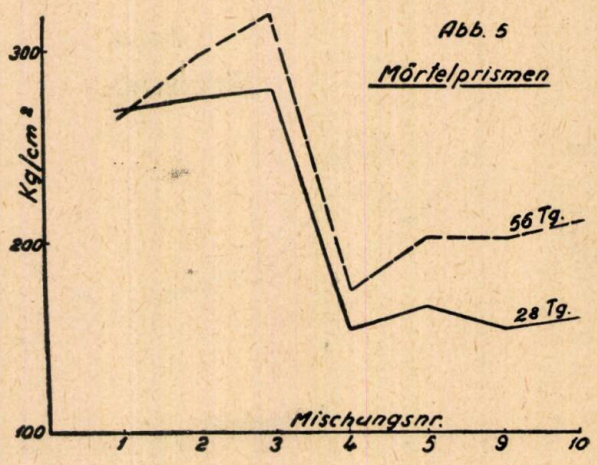


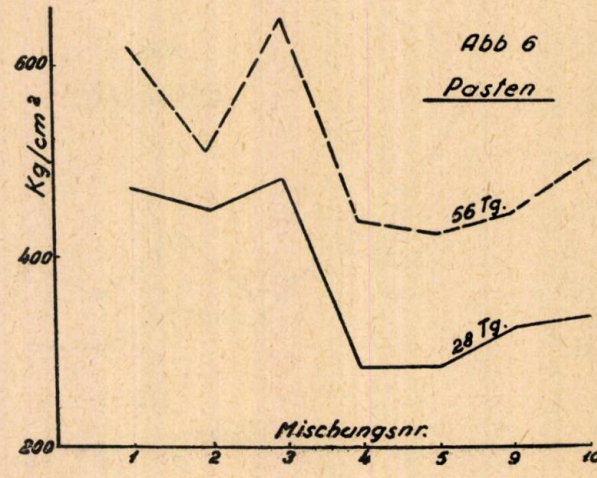


b. Der Zementersatz durch Santorinerde hat bei den Würfeln (Abb. 3) eine grössere Festigkeitsabnahme verursacht als der Trass Dieser Unterschied ist nicht mehr zu beobachten bei den Balken (Abb. 4), Mörtelprismen (Abb. 5) und Pasten (Abb. 6). Die Druckfestigkeitsabnahme infolge des Zementersatzes durch hydraulische Zusätze ist grösser bei den Mörteln und Pasten, also bei den Probekörpern mit kleineren Abmessungen, bei welchen die Austrocknung stärker und rascher vor sich ging, so dass die hydraulischen Zusätze nicht unter günstigen Bedingungen für die Entwicklung ihrer Tätigkeit ausgesetzt waren.

Weiter ist noch zu bemerken, dass der Kalkzusatz eine kleine

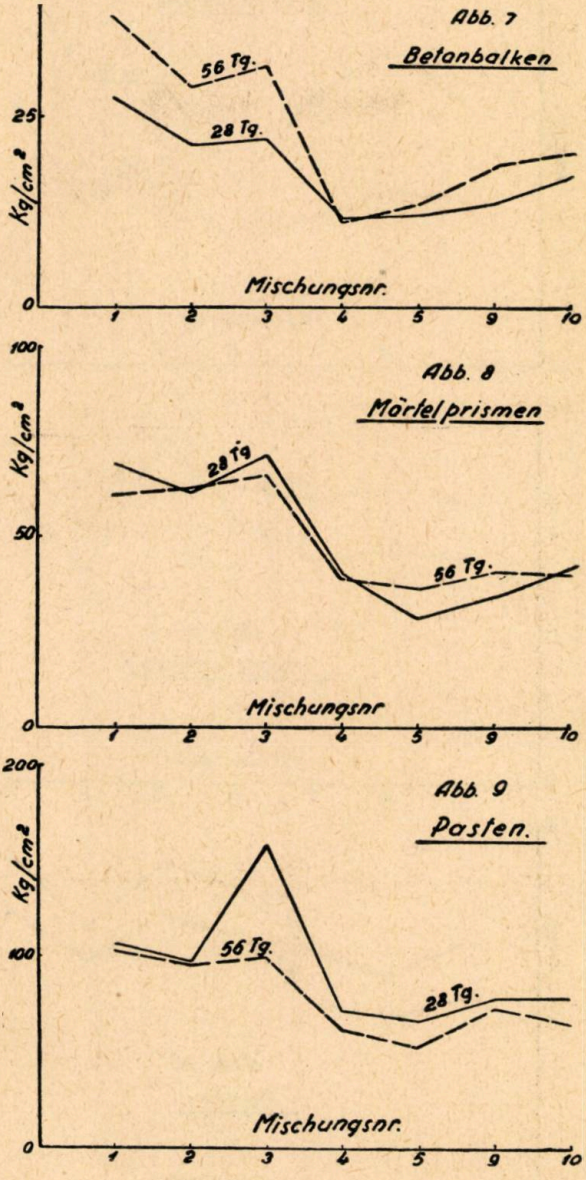
Festigkeitserhöhung verursacht hat, hauptsächhlich bei den Mischungen aus Zement und Santorinerde.





c. Die Biegezugfestigkeitswerte sind in den Abbildungen 7 (Balken), 8 (Mörtelprismen) und 9 (Pasten) dargestellt. Auch in diesem Fall hat der Zementersatz durch hydraulische Zusätze eine Herabsetzung der Festigkeit verursacht, welche von dem Kalkzusatz nicht mehr verbessert wird. Ein Festigkeitzuwachs zwischen 28 und 56 Tagen ist nur bei den Betonbalken zu beobachten; bei den Mörteln bleibt die Festigkeit praktisch unverändert und bei den Pasten nimmt sie ab. Dieser Unterschied ist wieder der stärkeren Austrocknung der kleineren Probekörper zuzuschreiben und steht in Einklang mit der älteren Beobachtung, dass die Trocknung die Druckfestigkeit begüstigt und die Zugfestigkeit beeinträchtigt.

d. Die beobachteten Schwindungen sind in den Abbildungen Nr. 10 für die Balken, Nr. 11 für die Mörtelprismen und Nr. 12 für die Pasten graphisch dargestellt. Ein paralleler Verlauf dieser



Kurven ist nicht zu beobachten. In der Tat, aus dem Vergleichen der Mischungen Nr. 3 und Nr. 4 ist ersichtlich, dass der Zementersatz durch Trass die Schwindung der Pasten erhöht, die des Mörtels unverändert lässt und die des Betons herabsetzt. Eine

ähnliche Feststellung können wir auch betreffend den Einfluss des Santorinzusatzes (Mischung Nr. 9), im Vergleich mit dem des

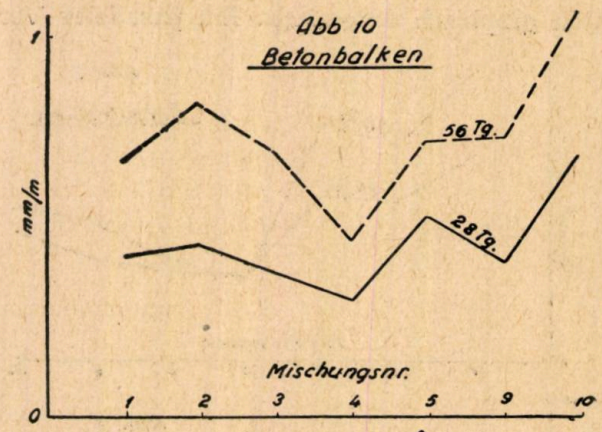


Abb 10
Betonbalken

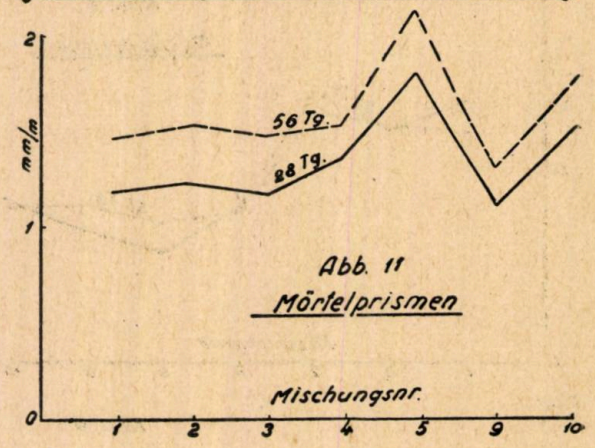


Abb. 11
Mörtelprismen

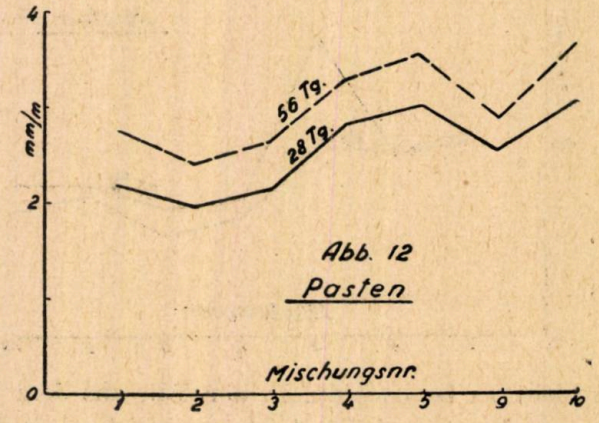


Abb. 12
Pasten

Trasses (Mischung Nr. 4) machen und zwar: in Pasten und Mörteln ist die Schwindung des getrassten Zementes grösser als die

des Santorinzementes, während beim Beton, gibt der getrasste Zement die kleinsten Werte. Aus diesen Feststellungen ist ersichtlich, dass die Unterschiede in dem Schwindverhalten der Mörtel nicht auf Betone vollständig übertragbar sind, so dass die unmittelbare Prüfung der Betone unbedingt notwendig ist.

Der Kalkzusatz hat in allen beobachteten Fällen eine Erhöhung der Schwindung verursacht, welche am ausgeprägten bei den Betonen auftritt. Berechnen wir die prozentuelle Erhöhung der Schwindung, welche von dem Kalkzusatz verursacht wurde, so erhalten wir die folgenden Werte:

	Getrasster Zement	Santorinhaltiger Zement.
Betonbalken	55%	45%
Mörtelprismen	37%	36%
Pasten	8%	27%

Aus diesen Ergebnissen ist ersichtlich, dass der Kalkzusatz, infolge seiner nachteiligen Einwirkung auf die Schwindung der Zementbetone mit hydraulischen Zusätzen, für Meerwasserbetone nicht zu empfehlen ist.

2. — *Zementarme Mischungen.* — Die Druckfestigkeiten dieser Mischungen sind in der Tafel Nr. 5 angezeigt und aus ihnen geht folgendes hervor:

a. Aus dem Vergleich der Mischungen 6a und 6b ist ersichtlich, dass eine längere ursprüngliche Aufbewahrung der Würfel unter feuchten Säcken, einen guten Einfluss auf die Festigkeit ausübt.

TAFEL Nr. 5

Mischungsnummer	Druckfestigkeit
6a	93 kg/cm²
6b	102 „ „
7	109 „ „
8	82 „ „
11	63 „ „
12	16 „ „

b. Bei den Betonen mit Bindemittel aus Trass und Zement (Nr. 6b und Nr. 7) ist es nicht ratsam zu viel Kalkpaste zu benützen, weil die durch diesen Zusatz verursachte Festigkeitsvergrösserung zu klein ist, während die Erhöhung des Kalkgehaltes der Betone, ihre Empfindlichkeit gegenüber den aggressiven Lösungen vergrössert.

c. Die trasshaltigen Betone zeigen immer eine höhere Druckfes-

tigkeit als die santorinhaltigen, hauptsächlich dann, wenn das Bindemittel nur aus hydraulischen Zuschlägen und Kalk besteht (vergleiche Nr. 8 mit Nr. 12).

Zusammenfassung

Es wurde eine Reihe von Stampfbetonen, sowie die entsprechenden Mörtel und Bindemittel, betreffend die Einwirkung von hydraulischen Zusätzen (Trass und Santorinerde) und vom Kalk auf Festigkeiten und Schwindung untersucht, und die folgenden wichtigsten Ergebnisse erhalten:

1. Die Druckfestigkeit der 20 cm-Würfel sind höher für die 28-Tage Probe und kleiner für die 56-Tage Probe als die der 10.10.7 cm Balkenhälften, infolge der kleineren Abmessungen der letzteren, was die Austrocknung begünstigt.

2. Der Zementersatz durch hydraulische Zusätze hat die Druckfestigkeit, sowie die Biegefestigkeit herabgesetzt, hauptsächlich dann, wenn Santorinerde als Zementersatz benützt wurde. Der Kalkzusatz erhöht ein wenig nur die Druckfestigkeit der Betone, welche Zemente mit hydraulischen Zusätzen enthalten.

3. Es gibt keinen Parallelismus zwischen der Schwindung der Betone und der der entsprechenden Mörtel, so dass die unmittelbare Schwindprüfung der Betone absolut notwendig ist.

4. Der Kalkzusatz hat die Betonschwindung immer erhöht, so dass seine Anwendung bei Seebauten nicht ratsam ist.

5. Von den zwei untersuchten hydraulischen Zusätzen, hat der Trass die beste Einwirkung auf die Betoneigenschaften ausgeübt.

Einen besonderen Dank spreche ich Herrn Prof. M. Hangan, welcher die Durchführung dieser Untersuchungen in seinem Beton-Laboratorium mit allen notwendigen Mitteln beförderte.

621 ÉLECTROTECHNIQUE

SUR LA SIGNIFICATION ET LES APPLICATIONS DES LOIS DE KIRCHHOFF

par **C. Budeanu**

Après la précision des notions : **réseaux valables, réseaux conjugués, réseaux à courants ou à tensions décalés,** *on relève que chacune des deux lois de Kirchhoff exprime un principe de conservation. On présente une expression générale de la deuxième loi de Kirchhoff et on montre le caractère valable de tout réseau conjugué, à tensions, ou à courants décalés par rapport à un autre réseau valable. Une proposition générale est donnée concernant cette propriété de validité.*

Toutes ces propriétés trouvent une application à toutes les lois de conservation concernant l'énergie, les puissances instantanées, actives, réactives, déformantes, apparentes, propriétés qui implicitement tiennent compte de l'ensemble des deux lois de Kirchhoff.

Précision des notions.

1) Nous savons que tout réseau électrique doit satisfaire simultanément aux deux lois de Kirchhoff.

Ceci veut dire que la réalisation d'un réseau sous un certain régime de courants et de tensions est possible seulement sous la réserve de la vérification de ces deux relations.

Nous adoptons dans ce qui suit les notions suivantes:

Réseau valable est celui dont le régime des courants et des tensions satisfait aux deux lois de Kirchhoff.

D'une manière générale, en régime continu ou sinusoïdal on peut réaliser matériellement les éléments unifilaires de tout réseau valable par un aménagement convenable d'appareils équivalant à des résistances, réactances et capacités.

Réseaux conjugués sont les réseaux ayant la même forme du point de vue du nombre et de la disposition des leurs éléments unifilaires, et dont les courants ou les tensions ou les deux à la fois,

d'un des réseaux sont conjugués par rapport à ceux de l'autre réseau [1]).

Evidemment la *réalisation matérielle* des éléments unifilaires des deux réseaux conjugués est différente. Elle doit correspondre au régime des tensions et des courants de tous les éléments unifilaires.

Dans ces conditions, en régime sinusoïdal, à tout *réseau valable* correspond trois réseaux conjugués, soit: un de tensions, un de courants, et un de tensions et courants.

Réseau à courants décalés est le réseau dont les courants de tous les éléments unifilaires sont décalés d'un même angle par rapport aux courants du réseau initial.

D'une manière analogue nous pouvons avoir un *réseau à tensions décalées* ou un *réseau à tensions et courants décalés* en même temps.

Sur la signification des lois de Kirchhoff.

2) Les lois de Kirchhoff ne doivent pas être envisagées comme des simples relations de conditions quelconques.

Elles ont une importante signification physique.

La première loi écrite, après intégration dans un interval de temps τ, nous exprime pour chaque noeud a:

$$\Sigma_a Q = 0 \tag{1}$$

où Q est la quantité d'électricité se déplaçant dans le temps τ dans chaque élément unifilaire adjacent au noeud en question vers ce noeud. Evidemment Q a des signes différents suivant qu'il s'agit d'un mouvement électronique vers le noeud ou en sens inverse.

En multipliant chaque relation (1) par $(V_a - V_0)$ où V_a est le potentiel du noeud de l'ordre a, V_0 un potentiel d'origine et en posant $W = (V_a - V_0)\, Q$, nous obtenons:

$$\Sigma_a W = 0. \tag{1)'}$$

Nous remarquons qu W représente le travail pour amener la quantité d'électricité Q du potentiel d'origine V_0 au potentiel V_a.

Par conséquent la première loi de Kirchhoff exprime la *conservation de la quantité d'électricité* ou encore la *conservation des travaux à effectuer par toutes les quantités d'électricité arrivant dans un même interval de temps au même noeud, à partir d'un même potentiel d'origine* V_0.

---

1) Nous appelons deux courants conjugués ceux qui peuvent s'exprimer vectoriellement par des valeurs complexes conjuguées telles que $\bar{I} = I \cos \beta \pm j\, I \sin \beta$. Les tensions conjuguées sont également $\bar{U} = U \cos \alpha \pm j\, U \sin \alpha$.

C'est une loi qui exprime éminemment un *principe de conservation.*

La seconde loi de Kirchhoff, dégagée des relations d'Ohm [1]), en remplaçant dans chaque élément unifilaire $\overline{E}—Z\overline{I}$ par la tension entre les extrémités de l'élément, $\overline{U}_n=\overline{E}_n—Z\overline{I}_n=\overline{V}_a—\overline{V}_b$ se réduit à:

$$\Sigma\,\overline{U}_n=\Sigma(\overline{V}_a—\overline{V}_b)=0 \tag{2}$$

C'est la même relation qui peut s'écrire sous la forme vectorielle connue:

$$\oint \overline{E}\cdot\overline{ds}=0 \tag{3}$$

et qui en langage électronique exprime que *le travail effectué par un électron le long de tout contour fermé d'un réseau est nul.*

Ceci nous met en évidence que la *seconde loi de Kirchhoff exprime également un principe de conservation.*

L'expression de la même situation physique par les deux relations (2) et (3) se rattache à la condition connue pour la relation (3) d'être valable dans un champ comportant des potentiels.

Ceci nous permet d'énoncer la proposition suivante:

(A) *Dans un réseau électrique, dès que nous envisageons les potentiels aux noeuds, implicitement nous tenons compte de la seconde loi de Kirchhoff.*

En effet, il est évident que si v_a, v_b, v_c, ... v_m, v_n, sont les potentiels des noeuds d'un contour fermé, nous avons toujours identiquement:

$$(v_a—v_b)+(v_b—v_c)+\ldots+(v_m—v_m)+(v_n—v_a)=0.$$

Si on change les potentiels aux noeuds n'importe comment, la seconde loi de Kirchhoff subsiste toujurs, mais il s'agit d'un autre réseau.

D'autre part, étant donné le *caractère conservatif énergétique et simultané* des deux lois de Kirchhoff, il est naturel de s'attendre également à un caractère conservatif pour toute propriété établie comme une conséquence de ces lois.

La validité des réseaux conjugués.

3) Soit un réseau en régime sinusoïdal, dans lequel nous exprimons:

---

1) Nous nous dégageons ici de la relation d'Ohm, puisque nous ne nous occupons pas de la matérialisation des réseaux. Autrement la répartition des courants et des tensions dépend effectivement de la manière dont le réseau est réalisé.

$v_a = \sqrt{2} V_a \sin(\omega t - \varepsilon_a)$ le potentiel d'un noeud quelconque d'ordre a,
$u_n = v_a - v_b = \sqrt{2} U_n \sin(\omega t - \alpha_n)$ la tension entre les extrémités de l'élément unifilaire de l'ordre n, et
$i_n = \sqrt{2} I_n \sin(\omega t - \beta_n)$ le courant dans le même élément,
ou en notations complexes des vecteurs correspondants:

$$(4) \quad \begin{cases} \overline{V}_a = V_a \cos \varepsilon_a - j V_a \sin \varepsilon_a = V'_a - j V''_a \\ \overline{U}_n = U_n \cos \alpha_n - j U_n \sin \alpha_n = U'_n - j U''_n \\ \overline{I}_n = I_n \cos \beta_n - j I_n \sin \beta_n = I'_n - j I''_n \end{cases}$$

Ces relations nous montrent que l'application de la première loi de Kirchhoff à un noeud quelconque d'ordre a nous amène aux relations simultanées:

$$(5) \qquad \Sigma_a I \cos \beta = 0 \qquad et \qquad \Sigma_a I \sin \beta = 0.$$

De même la seconde loi de Kirchhoff, appliquée à tout contour nous amène aux relations similaires:

$$(6) \qquad \Sigma U \cos \alpha = 0 \qquad et \qquad \Sigma U \sin \alpha = 0.$$

Nous déduisons des relations (5) la validité simultanée pour chaque noeud des expressions suivantes:

$$(7) \quad \begin{cases} \Sigma_a (I \cos \beta - j I \sin \beta) = 0 \\ \Sigma_a (I \cos \beta + j I \sin \beta) = 0 \end{cases}$$

D'une manière analogue nous déduisons des relations (6) pour tout contour fermé:

$$(8) \quad \begin{cases} \Sigma (U \cos \alpha - j U \sin \alpha) = 0 \\ \Sigma (U \cos \alpha + j U \sin \alpha) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent les deux lois de Kirchhoff s'appliquent à tout réseau conjugué d'un réseau initial valable.

Dans ces conditions les relations (7) et (8) nous permettent d'énoncer la proposition suivante:

(B) *Tous les réseaux électriques conjugués d'un réseau valable sont également valables.*

4) La propriété exprimée par la proposition (B) correspond, au fond, à une signification d'une certaine importance.

En effet, en envisageant la validité d'un réseau, et par conséquent l'application des lois de Kirchhoff à ce réseau, implicitement nous reconnaisons l'application des mêmes lois de Kirchhoff à tout réseau conjugué du réseau initial.

Et inversement, si nous envisageons l'application des deux lois de Kirchhoff à un réseau conjugué, ceci équivaut à reconnaître également l'application de ces lois au réseau initial.

La validité des réseaux à tensions ou à courants décalés.

5) Il est facile de voir que nous pouvons déduire des relations (5) pour chaque noeud *a*:

$$(9) \qquad \Sigma_a\, I \cos(\beta+\delta)=0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma_a\, I \sin(\beta+\delta)=0$$

où δ est un angle quelconque, le même pour tous les courants du réseau.

Ceci nous permet d'écrire également:

$$10) \begin{cases} \Sigma_a\, [I \cos(\beta+\delta) - j\, I \sin(\beta+\delta)]=0 \\ \Sigma_a\, [I \cos(\beta+\delta) + j\, I \sin(\beta+\delta)]=0 \end{cases}$$

D'une manière analogue nous déduisons des relations (6) pour tout contour fermé:

$$(11) \qquad \Sigma\, U \cos(\alpha+\gamma)=0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma\, U \sin(\alpha+\gamma)=0$$

et par conséquent:

$$(12) \begin{cases} \Sigma\,[U \cos(\alpha+\gamma) - j\, U \sin(\alpha+\gamma)] = 0 \\ \Sigma\,[U \cos(\alpha+\gamma) + j\, U \sin(\alpha+\gamma)] = 0 \end{cases}$$

L'angle γ est aussi le même pour toutes les tensions du réseau. L'angle γ pourrait être égal ou non à l'angle δ

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

(C) *La validité d'un réseau initial entraîne la validité de tous les réseaux à courants ou à tensions décalés par rapport au réseau initial ainsi que de tous leurs réseaux conjugués.*

Cette propriété est d'ailleurs évidente, étant donné que le décalage de tous les courants d'un même angle δ équivaut à un changement de l'origine des temps ce qui ne peut empiéter sur l'application de la première loi de Kirchhoff.

Dans les mêmes conditions le décalage unique γ de toutes les tensions ne peut empiéter sur l'application de la seconde loi de Kirchhoff à tous les contours fermés du réseau.

6) Nous observons que l'angle $\psi=\gamma-\delta$ représente l'accroissement uniforme de l'angle des décalages des courants par rapport aux tensions dans tous les éléments unifilaires du réseau.

Nous pouvons donc énoncer:

(D) *Un réseau, dans lequel nous modifions les décalages entre les tensions et les courants de tous les éléments unifilaires d'un même angle ψ, reste toujours valable.*

Généralisation.

7) Les relations (5), (6), (9) et (11) et par conséquent les propositions (B) et (C) envisagées ensemble peuvent nous mener à une généralisation que nous pouvons énoncer comme suit:

(E) *La validité de tout réseau électrique caractérisé par les lois de Kirchhoff* $\Sigma_a (I \cos \beta - j I \sin \beta) = 0$ *et* $\Sigma (U \cos \alpha - jU \sin \alpha) = 0$ *entraine la validité de tout autre réseau dont les lois de Kirchhoff peuvent s'exprimer sous la forme générale:*

$$\Sigma_a [kI \cos (\beta + \delta) \pm jk I \sin (\beta + \delta)] = 0$$

$$\Sigma [\lambda U \cos (\alpha + \gamma) \pm j\lambda U \sin (\alpha + \gamma)] = 0$$

où k, *et* λ *sont des facteurs réels et* γ *et* δ *des angles réels ayant des mêmes valeurs pour tout le réseau. La réciproque de cette propriété est également valable.*

Il s'en suit de cette propriété que la vérification des relations générales (proposition E) est suffisante pour nous permettre de constater l'application des deux lois de Kirchhoff au réseau initial, et par conséquent la validité de ce réseau.

Situation en régime non sinusoïdal.

8) Les mêmes conclusions s'appliquent à un régime non sinusoïdal pour chaque harmonique à part.

Le réseau reste toujours valable si nous changeons une, ou toutes les harmoniques de tension ou de courant suivant les normes envisagées plus haut dans le cas d'un régime sinusoïdal.

Pourtant la réalisation matérielle en régime non sinusoïdal n'est pas facile et ni même toujours possible pour toutes les multiples combinaisons de toutes ces modifications théoriquement valables.

Applications.

9) Les propriétés que nous venons de relever sont susceptibles de nous fournir certaines justifications et applications dans la pratique.

Pour préciser les idées, nous nous résumons pour le moment, à la situation d'un régime sinusoïdal.

Tout raisonnement appliqué à un réseau conjugué ou à un réseau du type général (proposition E) nous permet de constater la validité du réseau initial et par conséquent *l'application des deux lois de Kirchhoff à ce réseau initial.*

Ainsi, par exemple, nous rappelons que M. *Boucherot* a accepté et retenu la démonstration suivante de son théorème sur la conservation des puissances active et réactive.

La première loi de Kirchhoff écrite pour les différents noeuds a, b, du réseau, nous donne:

$$(13) \qquad \Sigma_a i = 0, \qquad \Sigma_b i = 0, \ldots\ldots$$

Les potentiels de ces différents noeuds du réseau sont:

$$(14) \quad v_a = \sqrt{2}\, V_a \sin(\omega t - \varepsilon_a), \quad v_b = \sqrt{2}\, V_b \sin(\omega t - \varepsilon_b)$$

Nous multiplions chacune des relations (13) par les fonctions conjuguées v'_a, v'_b, des potentiels (14) définies comme suit:

$$v'_a = \sqrt{2}\, V_a \sin(\omega t + \varepsilon_a), \quad v'_b = \sqrt{2}\, V_b \sin(\omega t + \varepsilon_b)$$

Nous ajoutons tous ces produits tellement établis et en nous imposant la condition que cette relation finale soit satisfaite quel que soit le temps t, nous obtenons les conditions:

$$(16) \begin{cases} \Sigma U_n I_n \cos(\alpha_n + \beta_n) = 0 \\ \Sigma U_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n) = 0 \\ \Sigma U_n I_n \sin(\alpha_n - \beta_n) = 0 \end{cases}$$

Ici U_n et α_n sont la valeur efficace et le décalage de la tension dans l'élément unifilaire d'ordre n du réseau, dont les potentiels aux noeuds adjacents seraient par exemple v_a et v_b.

Par conséquent nous définissons U_n et α_n par les expressions:

$$(17) \begin{cases} v_a - v_b = \sqrt{2} V_a \sin(\omega t - \varepsilon_a) - \sqrt{2} V_b \sin(\omega t - \varepsilon_b) = \sqrt{2} U_n \sin(\omega t - \alpha_n) \\ v'_a - v'_b = \sqrt{2} V_a \sin(\omega t + \varepsilon_a) - \sqrt{2} V_b \sin(\omega t + \varepsilon_b) = \sqrt{2} U_n \sin(\omega t + \alpha_n) \end{cases}$$

De même I_n et β_n sont la valeur efficace et le décalage du courant dans le même élément d'ordre n.

$$i_n = \sqrt{2}\, I_n \sin(\omega t - \beta_n).$$

Si nous mettons en évidence les décalages $\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$ du chaque élément unifilaire du réseau, les relations (16) deviennent

$$(18) \begin{cases} \Sigma U_n I_n \cos(2\beta_n + \varphi_n) = 0 \\ \Sigma U_n I_n \cos\varphi_n = 0 \\ \Sigma U_n I_n \sin\varphi_n = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières expressions de ces relations représentent *la conservation simultanée des puissances active et réactive dans tout le réseau.*

Nous voyons que ce raisonnement envisage comme point de départ *la première loi de Kirchhoff* et *les potentiels conjugués aux noeuds, et par conséquent les tensions conjuguées des différents éléments unifilaires du réseau.*

Pourtant il serait complètement faux de croire que cette démonstration et les conclusions qui s'en dégagent ignorent la seconde loi de Kirchhoff du réseau initial [1]).

En effet, la démonstration plus haut envisagée, en faisant introduire les potentiels conjugués aux noeuds, implicitement tient compte de la seconde loi de Kirchhoff appliquée, bien sur, à ce réseau conjugué. (Voir proposition A).

Nous nous trouvons donc en présence d'un réseau conjugué valable, et par conséquent satisfaisant aussi bien à la première loi de Kirchhoff, étant donné les relations (13) qu'à la seconde loi de Kirchhoff, étant donné la proposition (A).

Ensuite suivant la proposition (B) la validité du réseau conjuqué envisagé entraîne la validité du réseau initial et par conséquent la vérification de *l'ensemble des deux lois de Kirchhoff au réseau initial,* dont cette propriété de conservation tient implicitement compte.

10) D'ailleurs, dans le cas particulier de cette application on peut arriver également à la même conclusion par d'autres voies.

En effet, nous avons déjà montré depuis longtemps [2]), qu'en partant de l'expression *des deux lois de Kirchhoff* appliquées aux valeurs instantanées ainsi que de l'expression de la *conservation des puissances instantanées* nous arrivons aux relations de conservation suivantes, à l'intérieur d'un réseau:

$$(19)\quad \begin{cases} \Sigma U_n I_n \cos\alpha_n \cos\beta_n = 0 \\ \Sigma U_n I_n \sin\alpha_n \sin\beta_n = 0 \\ \Sigma U_n I_n \cos\alpha_n \sin\beta_n = 0 \\ \Sigma U_n I_n \sin\alpha_n \cos\beta_n = 0 \end{cases}$$

En combinant deux à deux ces relations nous obtenons

$$(20)\quad \begin{cases} \Sigma U_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n) = \Sigma U_n I_n \cos\varphi_n = 0 \\ \Sigma U_n I_n \sin(\alpha_n - \beta_n) = \Sigma U_n I_n \sin\varphi_n = 0 \\ \Sigma U_n I_n \cos(\alpha_n + \beta_n) = 0 \\ \Sigma U_n I_n \sin(\alpha_n + \beta_n) = 0 \end{cases}$$

1) D'ailleurs la simple autorité technique et scientifique de M. *Boucherot* aurait été suffisante pour nous rassurer à ce sujet.

2) Voir: *Sur la conservation des puissances réactives et sa généralisation en régime quelconque.* (Publication „I.R.E". Comité pour l'amélioration du facteur de puissance No. 4, Page 214, mai 1929).

Nous constatons que ce resultat complète celui déjà trouvé par les relations (16).

D'ailleurs si nous avions appliqué les potentiels effectifs v_a, v_b... aux relations (13) et en suivant le raisonnement du paragraphe (9), nous aurions obtenu les relations:

$$(21)\quad \begin{cases} \Sigma U_n I_n \cos(\alpha_n + \beta_n) = 0 \\ \Sigma U_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n) = 0 \\ \Sigma U_n I_n \sin(\alpha_n + \beta_n) = 0 \end{cases}$$

En combinant les systèmes (16) et (21) nous retrouvons le même système des relations (20) auquel nous sommes arrivés par la voie d'un raisonnement direct basé sur *les lois de Kirchhoff appliquées au réseau effectif envisagé* (relations 19).

Nous en déduisons que le système (19) est une forme générale des propriétés de conservation à l'intérieur d'un réseau, dont la propriété de conservation simultanée des puissances actives et réactives (les deux premières relations 20) est une conséquence immédiate.

Et cette propriété tien compte simultanément de l'ensemble des deux lois de Kirchhoff [1]).

11) L'ensemble des deux lois de Kirchhoff nous conduit également à la vérification du principe fondamental de la conservation de l'énergie à l'intérieur d'un réseau.

En effet, en multipliant chacune des relations de la première loi de Kirchhoff (relation 13) par les potentiels effectifs v_a, v_b... aux noeuds correspondants et en ajoutant tous ces produits nous arrivons à l'expression:

$$(22)\qquad \Sigma (v_a - v_b)\, i_n = \Sigma\, u_n\, i_n = 0$$

C'est *la conservation de la puissance instantanée à l'intérieur du réseau.*

Nous avons déjà montré également qu'en poursuivant en régime non sinusoïdal le raisonnement indiqué au paragraphe (10) pour le régime sinusoïdal, nous arrivons toujours et simultanément à la *conservation des puissances actives et réactives ainsi qu'à la conservation vectorielle des puissances déformantes et apparentes* [2]).

---

1) D'ailleurs M. le prof. W. Quade de Karlsruhe, après avoir relevé la priorité de ma demonstration concernant les propriétés de conservation en régime non sinusoïdal, a relevé également par la voie d'un raisonnement différent la corrélation entre la conservation de la puissance réactive et la deuxième loi le Kirchhoff. Il s'exprime textuellement à ce sujet: *Der Satz der Erhaltung der Blindleistung folgt aus dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz.*

2) Voir: *Quelques considérations sua le rôle physique des puissances instantanées....* Bull. Mathém. et Physique. Ec. Polytechnique 1929).

Conclusions.

12) Nous croyons dégager de la présente étude les principales conclusions suivantes:

a) Les lois de Kirchhoff ont une importante signification physique. Elles expriment des principes essentiels de conservation.

b) La validité d'un réseau entraîne la validité de tout réseau conjugué avec le premier et qui par conséquent se soumet également aux deux lois de Kirchhoff.

c) La validité d'un réseau entraîne également la validité de tout réseau ayant par rapport au premier les courants ou les tensions décalés d'un même angle pour tout le réseau.

d) Dans ces conditions tout raisonnement basé sur la validité d'un réseau conjugué ou à courants ou à tensions décalés implique la validité du réseau initial et par conséquent l'application des deux lois de Kirchhoff à ce réseau.

e) Les propriétés de conservation à l'intérieur d'un réseau, telles que la conservation de l'énergie, des puissances instantanées, actives, réactives, déformantes, *tiennent compte implicitement de l'ensemble des deux lois de Kirchhoff.*

f) D'une manière générale les lois de Kirchhoff constituent une admirable synthèse d'une propriété physique fondamentale mise à profit dans une quantité d'applications courantes.

Bucarest, le 2 avril 1941.

SUR L'ERREUR RELATIVE DANS LA MESURE DE LA RÉSISTANCE D'UN GALVANOMÈTRE PAR LA MÉTHODE DU SHUNT

par **Vlad Radulesco**

On recherche une formule simple pour l'erreur relative totale dans la mesure de la résistance d'un galvanomètre par la méthode du shunt. L'erreur totale maxima probable est la somme de deux termes : l'erreur de construction et l'erreur de détermination. On démontre que la première croît avec m, qui est le rapport entre le shunt et la résistance du galvanomètre, tandis que la deuxième est proportionnelle avec $m+1$, ainsi qu'avec R_1, résistance en série avec le galvanomètre dans la première partie de la mesure.

On connait la relation qui exprime la résistance d'un galvanomètre à cadre mobile, dans la méthode du shunt. Cette méthode consiste dans la mesure de la déviation du galvanomètre, la première fois en série avec une seule résistance R_1 (déviation α_1), la deuxième fois en série avec une résistance R_2, le galvanomètre étant cette fois prévu avec un shunt S (déviation α_2). On obtient ainsi (voir le schéma fig. 1):

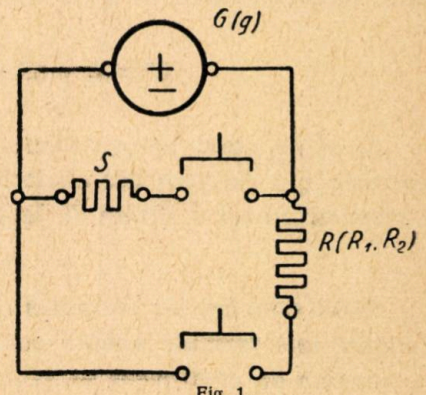


Fig. 1.

$$\alpha_1 = \frac{KE}{R_1 + g}, \quad \alpha_2 = \frac{KE}{R_2 + \frac{gS}{g+S}} \cdot \frac{S}{g+S} = \frac{KES}{R_2(g+S)+gS} \quad (1)$$

où K est la constante du galvanomètre.

Si nous réglons le shunt S de manière à avoir $\alpha_1 = \alpha_2$,:

$$\frac{KE}{R_1 + g} = \frac{KES}{R_2(g+S) + gS} \qquad (1')$$

il en résulte:

$$g = \frac{R_1 - R_2}{R_2} S. \qquad (2)$$

Nous faisons pour cela l'hypothèse simplificatrice que l'égalité $\alpha_1 = \alpha_2$, a lieu *rigoureusement,* pour la valeur de S qui satisfait la relation (2); car autrement, si l'on a $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha_1$, le membre de droite de l'égalité (1') se multiplie par le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \Delta\alpha_1}$, et la déduction de l'erreur relative devient très laborieuse.

En prenant $S = mg$, respectivement $\frac{S}{g} = m$, où m est le coéfficient démultiplicateur du shunt, pris arbitrairement, on démontre que dans ce cas on doit avoir:

$$R_2 = \frac{m}{m+1} R_1 \qquad (3)$$

Si l'on prend R_1 et R_2 selon la formule (3), en réglant S pour avoir $\alpha_1 = \alpha_2$, la valeur de S se déduit en général comme résultat d'une interpolation, quand S est formé par une boîte de résistances (sans variation continue pour les valeurs de S):

$$S = S_1 + (S_2 - S_1) \frac{\alpha'}{\alpha' + \alpha''} \qquad (4)$$

S_1 et S_2 étant deux valeurs de la boîte, les plus rapprochées possibles, qui donnent des déviations appréciables α' et α'' à gauche et respectivement à droite *de la position de* α_1.

*

Etant données les formules (2), (3) et (4), nous nous proposons d'établir *une formule simple pour l'erreur relative totale maxima, en fonction du coefficient m,* pour pouvoir prédeterminer les conditions optima pour la mesure de la résistance g d'un galvanomètre donné, par la méthode du shunt.

Si l'on prend une grandeur x, fonction de trois variables indépendantes a, b et c:

$$x = f(a, b, c),$$

l'erreur relative que l'on peut commettre en mesurant cette grandeur, s'exprime par:

$$\frac{\Delta x}{x} = a\,\frac{f'a}{f(a,b,c)}\cdot\frac{\Delta a}{a} + b\,\frac{f'b}{f(a,b,c)}\cdot\frac{\Delta b}{b} + c\,\frac{f'c}{f(a,b,c)}\cdot\frac{\Delta c}{c} \qquad (5)$$

où $f'a$, $f'b$, $f'c$ sont les dérivées partielles de la fonction par rapport à a, b et c, et $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$ et $\frac{\Delta c}{c}$ les erreurs relatives des variables indépendantes a, b et c.

Cette relation (5) se déduit du développement en série de l'expression $x+\Delta x$, en donnant à toutes les variables des croissances finies Δa, Δb, Δc,... et en négligeant, comme des infiniment petits d'ordre supérieur, les termes de ces grandeurs d'ordre plus grande que 1.

La relation (2) peut encore s'écrire:

$$g = \frac{R_1}{R_2}S - S.$$

Posons: $R_1 = a$, $R_2 = b$, $S = c$

En appliquant la formule (5) dans notre cas, nous obtenons:

$$\frac{\Delta g}{g} = R_1\cdot\frac{S}{R_2}\cdot\frac{1}{R_1-R_2}\cdot\frac{R_2}{S}\cdot\frac{\Delta R_1}{R_1} - R_2\cdot\frac{R_1 S}{R_2^2}\cdot\frac{1}{R_1-R_2}\cdot\frac{R_2}{S}\cdot\frac{\Delta R_2}{R_2} -$$

$$-S\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}-1\right)\cdot\frac{1}{R_1-R_2}\cdot\frac{R_2}{S}\cdot\frac{\Delta S}{S}$$

En opérant toutes les simplifications, il résulte:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta R_1}{R_1-R_2} - \frac{\Delta R_2}{R_1-R_2}\cdot\frac{R_1}{R_2} - \frac{\Delta S}{S} \qquad (5')$$

Etant donné que nous cherchons *l'erreur relative maxima*, nous pouvons considérer le cas où les différents termes de l'erreur relative s'additionnent; donc nous pouvons remplacer les signes *moins* par des signes *plus*, et nous obtenons:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta R_1}{R_1-R_2} + \frac{\Delta R_2}{R_1-R_2}\cdot\frac{R_1}{R_2} + \frac{\Delta S}{S} \qquad (5'')$$

Si l'on tient compte que, pour la boîte à résistances R il n'y a à envisager que des erreurs de construction, on peut adopter $\Delta R_1 = \Delta R_2$. En ce cas, l'équation (5) s'écrit:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta R_2}{R_1-R_2}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta R_2}{R_2}\cdot\frac{R_1+R_2}{R_1-R_2} + \frac{\Delta S}{S}$$

où bien, si l'on prend $R_2 = \frac{m}{m+1} R_1$ [relation (3)]:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta R_2}{R_2} \cdot \frac{R_1 (1 + \frac{m}{m+1})}{R_1 (1 - \frac{m}{m+1})} + \frac{\Delta S}{S},$$

ou enfin, en remarquant que $\frac{\Delta R_2}{R_2}$ est l'erreur relative de construction pour la boîte R, et peut s'écrire $\frac{\Delta R}{R}$:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta R}{R} \cdot (2\ m+1) + \frac{\Delta S}{S} \qquad (6)$$

La relation (6) nous donne la formule théorique de l'erreur relative commise dans la mesure de la résistance g par la méthode du shunt. En réalité, si par rapport aux résistances R_1 et R_2 on n'a à envisager que l'erreur de construction $\frac{\Delta R}{R}$ pour la boîte R, la résistance S comporte, en dehors de l'erreur de construction, une erreur de détermination, la valeur de cette résistance étant déterminée par un réglage et par une interpolation. Et, étant donné que nous cherchons l'expression de l'erreur relative maxima, nous admettrons que l'erreur de construction et l'erreur de détermination par rapport à S, s'additionnent.

En résumé, l'erreur totale $\frac{\Delta g}{g}$ peut être considérée comme étant composée de deux termes: une *erreur de construction* et une *erreur de détermination:*

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta_c g}{g} + \frac{\Delta_d g}{g}$$

dans laquelle:

$$\frac{\Delta_c g}{g} = (2\ m+1) \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta_c R}{R} \qquad (7)$$

et $\frac{\Delta_d g}{g} = \frac{\Delta_d S}{S}$, dont nous allons établir l'expression, en fonction de m et des constantes intervenant dans le mesure.

En appliquant la formule (7) pour différentes valeurs de m, et admettant $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta_c S}{S} = 0{,}2\%$ (cas courant des boîtes de résistances

industrielles), nous obtenons:

m	$m2+1$	$\Delta_c g^0/_0$
1/4	1,5	0,50
1/2	2	0,60
1	3	0,80
2	5	1,20
3	7	1,60
4	9	2,00

Par conséquent, *l'erreur de construction maxima probable croît sensiblement avec le valeur de m.*

*

Passons maintenant à l'établissement de l'expression de $\frac{\Delta_d S}{S}$:

Différentions par rapport à α l'expression de S donnée par la relation d'interpolation (4), et divisons par S, en admettant que les déviations α' et α'', de la relation (4), aient des signes contraires par rapport à la position de α_1 (et par conséquent $\Delta\alpha' = -\Delta\alpha'' = \Delta\alpha$). Il résulte comme expression de l'erreur de détermination:

$$\frac{\Delta_d S}{S} = \frac{S_2 - S_1}{S} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\alpha' + \alpha''} \qquad (8)$$

Nous rappelons que α' et α'' représentent des déviations à gauche, respectivement à droite de la position de α_1 (déviation initiale), quand le shunt prend les vnleurs S_1, respectivement S_2.

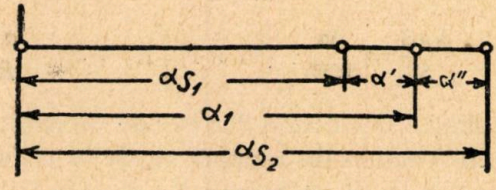


Fig. 2.

Or, on a évidemment (fig. 2):

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha_{S_2} - \alpha_{S_1} = \frac{KE}{R_2 + \frac{gS_2}{g+S_2}} \cdot \frac{S_2}{g+S_2} - \frac{KE}{R_1 + \frac{gS_1}{g+S_1}} \cdot \frac{S_1}{g+S_1}$$

ou bien:

$$\alpha' + \alpha'' = KE\left[\frac{S_2}{R_2(g+S_2)+gS_2} - \frac{S_1}{R_1(g+S_1)+gS_1}\right]$$

En effectuant les opérations indiquées entre paranthèses, nous obtenons:

$$\alpha' + \alpha'' = KE \cdot \frac{gR_2(S_2 - S_1)}{[R_2(g+S_2)+gS_2][R_1(g+S_1)+gS_1}$$

et, en tenant compte de la relation $S=mg$, la relation (8) devient:

$$\frac{\Delta_d S}{S} = \frac{(S_2-S_1)}{mg} \frac{\Delta\alpha}{KE} \frac{[R_2(g+S_2)+gS_2][R_1(g+S_1)+gS_1]}{gR_2(S_2-S_1)}$$

ou encore:

$$\frac{\Delta_d S}{S} = \frac{\Delta\alpha}{KE} \cdot \frac{[R_2(g+S_2)+gS_2][R_1(g+S_1)+gS_1]}{mg^2R_2} \qquad (9)$$

Etant donné que S_2 est très approché comme valeur, par rapport à S_1, nous pouvons écrire, en faisant une approximation:

$$g+S_2 \cong g+S_1 \cong g+S, \text{ et } gS_2 \cong gS_1 = gS$$

Par cela, la relation (9) devient, en tenant compte que $S=mg$:

$$\frac{\Delta_d S}{S} = \frac{\Delta\alpha}{KE} \cdot \frac{[R_2(g+S)+gS]^2}{mg^2R_2} = \frac{\Delta\alpha}{KE} \cdot \frac{R_2^2(1+m)^2g^2+2R_2(1+mm)g^3+m^2g^4}{mg^2R_2}$$

En faisant toutes les simplifications nécessaires, il résulte:

$$\frac{\Delta_d S}{S} = \frac{\Delta\alpha}{KE} \cdot \left[R_2\frac{(m+1)^2}{m} + 2(m+1)g + \frac{mg^2}{R_2}\right] \qquad (10)$$

ou, en remplaçant R_2 par $R_1\frac{m}{m+1}$:

$$\frac{\Delta_d S}{S} = \frac{\Delta\alpha}{KE} \cdot (m+1)\left[R_1 + 2g + \frac{g^2}{R_1}\right] \qquad (11)$$

une formule simple qui donne l'erreur de détermination par rapport au shunt S, en fonction du rapport m, de la résistance g du galvanomètre essayé et de la résistance R_1, dont la valeur est arbitraire.

Etant donné qu'en général g est très petit par rapport à R_1, on peut négliger les termes $2g$ et g^2/R_1, et l'expression de l'erreur de détermination prend la forme simplifiée:

$$\frac{\Delta_d S}{S} = \frac{\Delta\alpha}{KE}(m+1)R_1 \qquad (12)$$

Par conséquent, l'erreur de détermination croît proportionnellement à la résistance R_1, à $m+1$, et évidemment, est d'autant plus petite que la constante du galvanomètre et la force électromotrice E utilisée dans le circuit de mesure, sont plus grandes.

Application numérique.

Nous choisissons deux valeurs pour R_1: 40.000 ohms et 60.000 ohms, et différentes valeurs pour m, comprises entre $\frac{1}{4}$ et 4. Les valeurs calculées pour l'erreur de détermination, soit avec la formule (11), soit avec la formule simplifiée (12), en prenant un galvanomètre avec $K=6$ mm/μ A, (ou bien $K=6\times10^6$mm par ampère), et $g=200$ ohms, $\Delta\alpha=0{,}25$ mm *), et comme source de courant une pile d'environ 1,5 volts, résultent plus bas:

$\frac{\Delta\alpha}{KE}$ (1/ohms)	m	$R_1(m+1)$ (ohms)	$(R_1+2g+\frac{g^2}{R_1})\times(m+1)$ (ohms)	$\frac{\Delta_d S}{S}$ % formule (12)	$\frac{\Delta_d S}{S}$ % formule (11)
A) Pour $R_1=40.000$ ohms.					
$\frac{0{,}25\ mm}{6\times10^6\ \text{mm/amp}\times1{,}5\ V}=$					
$=0{,}0278\times10^{-6}$	1/4	50.000	50.501	0,1390	0,1404
„ „	1/2	60.000	60.601,5	0,1668	0,1685
„ „	1	80.000	80.802	0,2224	0,2246
„ „	2	120.000	121.203	0,3336	0,3369
„ „	3	160.000	161.604	0,4448	0,4493
„ „	4	200.000	202.005	0,5560	0,5616
B) Pour $R_1=60.000$ ohms.					
$\frac{0{,}25\ mm}{6\times10^6\ \text{mm/amp}\times1{,}5\ V}=$					
$=0{,}0278\times10^{-6}$	1/4	75.000	75.507,5	0,2085	0,2099
„ „	1/2	90.000	90.601	0,2502	0,2519
„ „	1	120.000	120.801,3	0,3336	0,3358
„ „	2	180.000	181.202	0,5004	0,5038
„ „	3	240.000	241.602,6	0,6672	0,6717
„ „	4	300.000	302.003,3	0,8340	0,8396

On voit que la différence entre les valeurs calculées avec la formule (11) et celles calculées avec la formule (12) est inappréciable; c'est d'ailleurs le cas pour tous les galvanomètres ayant des résistances jusqu'à environ 2000 ohms, étant donné que R_1 doit toujours avoir une valeur de quelques dizaines de milliers d'ohms, pour obtenir dans le circuit des courants d'ordre de microampères ($1\mu A=10^{-6}$ ampères).

Vérification expérimentale:

L'application pratique de la méthode du shunt, à la mesure

*) Limite de l'appréciation visuelle.

de la résistance du galvanomètre à cadre mobile et lecture indirecte No. 1574, du Laboratoire de Mesures Electriques de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, a donné les résultats compris dans le tableau ci-dessous. Caractéristiques du galvanomètre: Résistance g d'environ 200 ohms, $K=6\times10^6$ mm/amp. (environ).

Pour les mêmes valeurs de R_1 et m comme ci-dessus, les résultats sont les suivants [$\frac{\Delta_d S}{S}$ étant calculé avec la formule (4)]:

R_1 ohms	m	R_2 ohms	α_1 mm	S_1 ohms	α' mm	S_2 ohms	α'' mm	S ohms	g ohms	$\frac{\Delta_d S}{S}$ %	$\frac{\Delta_c g}{g}$ %	$\frac{\Delta g}{g}$ totale %
40.000	1/4	8.000	194	50	1	51	2,5	50,285	201,144	0,1420	0,5000	0,6420
„	1/2	13.333	„	99	1	101	1,5	99,80	199,600	0,2004	0,6000	0,8004
„	1	20.000	„	200	1	204	1	202	202,000	0,2475	0,8000	1,0475
„	2	26.666	„	400	1	410	1	405	202,500	0,3086	1,2000	1,5086
„	3	30.000	„	600	1	620	1	610	203,330	0,4098	1,6000	2,0098
„	4	32.000	„	800	1,5	840	1	824	207,000	0,4854	2,0000	2,4854
60.000	1/4	12.000	130,5	50	1	51	1	50,5	202,000	0,2475	0,5000	0,7475
„	1/2	20.000	„	100	1,5	103	1	101,8	203,600	0,2947	0,6000	0,8947
„	1	30.000	„	201	1	207	1	204,5	204,500	0,3667	0,8000	1,1667
„	2	40.000	„	406	1	420	0,75	414	207,000	0,4831	1,2000	1,6831
„	4	48.000	„	810	1	860	1	835	208,750	0,7486	2,0000	2,7486

En ce qui concerne le tableau ci-dessus, il y a d'abord à remarquer que les mesures contenues dans celui-ci, sont affectées *d'une erreur en plus,* — en dehors de celles déjà évaluées. C'est notamment *une erreur de méthode* dans l'interpolation de chaque valeur de S, erreur qui nous fait déterminer *en excès* les valeurs de S (exceptant le cas de $R_1=40.000$ ohms, $m=\frac{1}{2}$, qui s'abat de cette règle, probablement par une lecture moins sûre des déviations).

En effet, la relation qui lie α à S est:

$$\alpha=\frac{KES}{R_2(g+S)+gS}$$

où, sous une forme générale:

$$\alpha=\frac{A.S}{B.S+C}$$

dans laquelle A, B, et C sont des constantes.

La première derivée de cette fonction est:

$$\frac{d\alpha}{dS}=\frac{ABS+AC-ABS}{(BS+C)^2}=\frac{AC}{(BS+C)^2},$$

à valeurs constamment positives.

La deuxième derivée est:

$$\frac{d^2\alpha}{dS^2}=-\frac{2AB(BCS+C^2)}{(BS+C)^4}$$

à valeurs constamment négatives.

Donc, la courbe $\alpha=f(S)$ est croissante, et sa convexité est dirigée vers le haut (voir fig. 3).

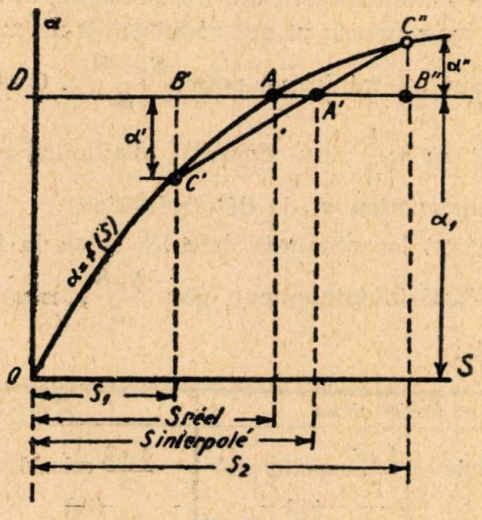


Fig. 3.

Or, l'interpolation selon la formule (4) admet une *variation linéaire* de α, entre les limites α' et α'', en fonction de S. Il est par conséquent facile à voir, dans la figure 3, que cette hypotèse simplificatrice a comme effet que la valeur de S interpolée est *toujours plus grande* que celle de S réelle. L'erreur absolue correspondante est donc d'autant plus grande que le rapport entre B′ B″ et DA′, — c'est-à-dire $\frac{S_2-S_1}{S}$, — est plus grand. Dans le tableau exposé ci-dessus, l'on voit que la valeur de g déterminée par l'intermède de S, croît

toujours avec le rapport m. Nous déterminons ainsi des valeurs en excès, qui dépassent la valeur théorique de 200 ohms pour g, l'excès atteignant 4,375% pour $R_1 = 60.000$ ohms et $m = 4$. Ces valeurs ont de même pour résultat:

$$\frac{S_2 - S_1}{S} = \frac{860 - 810}{835} \times 100 \cong 6\%$$

Il serait donc juste *d'ajouter* à la valeur de l'erreur $\frac{\Delta g}{g}$ totale, dans le tableau ci-dessus, *encore un terme correspondant à l'erreur de méthode signalée.* Pour déterminer dans chaque cas cette erreur de méthode, il faudrait construire exactement la courbe $\alpha = f(S)$ et déterminer ensuite graphiquement les écarts AA', représentant les erreurs absolues commises. Mais cette méthode, étant trop laborieuse, s'élimine complétement dans la pratique, et il reste à compter seulement sur les rapports m qui réduisent à un minimum cette erreur, en donnant un minimum pour $\frac{S_2 - S_1}{S}$. C'est le cas, des rapports $m = \frac{1}{4}$ et $m = \frac{1}{2}$, qui donnent d'ailleurs aussi le minimum d'erreur de construction et de détermination.

En comparant les résultats calculés selon la formule (11) avec ceux vérifiés expérimentalement, pour $\frac{\Delta_d S}{S}$, nous obtenons les résultats suivants:

m	$R = 40.000$ ohms		$R = 60.000$ ohms	
	$\frac{\Delta_d S}{S}$ calculé (%)	$\frac{\Delta_d S}{S}$ experimenté (%)	$\frac{\Delta_d S}{S}$ calculé (%)	$\frac{\Delta_d S}{S}$ experimenté (%)
1/4	0,1404	0,1420	0,2099	0,2475
1/2	0,1685	0,2004	0,2519	0,2947
1	0,2246	0,2475	0,3358	0,3667
2	0,3369	0,3086	0,5038	0,4831
3	0,4493	0,4098	0,6717	—
4	0,5616	0,4854	0,8396	0,7486

Ces résultats comparatifs se traduisent graphiquement par le diagramme figuré plus bas (figure 4).

Il résulte que l'expression (11) [ou bien (12) qui lui est très rapprochée, donne des valeurs très rapprochées de celle vérifiées expérimentalement, dans les cas des petits rapports $m = \frac{S}{g}$ et des

valeurs *plus grandes* que celles vérifiées en pratique, pour des grands rapports m, l'écart croissant avec m. Le fait est explicable, si l'on se rappelle que la formule (11) a été déduite en faisant l'hypotèse que S_1 est très rapproché de S_2, — ce qui devient de plus en plus faux, à mesure que m croît.

Enfin, il est à remarquer que les points du diagramme correspondants aux valeurs déterminées par expérience s'écartent un peu de la droite théorique de la variation de $\frac{\Delta_d S}{S}$ avec m. Cela est dû au fait que les valeurs lues pour α' et α'' ont été arrondies à un chiffre d'au moins 1 mm (dans un seul cas, 0,75 mm), à cause de l'inexactitude avec lequelle ces déviations ont été lues sur la règle graduée du galvanomètre, (étant donnée la largeur propre de l'index lumineux marquant les déviations).

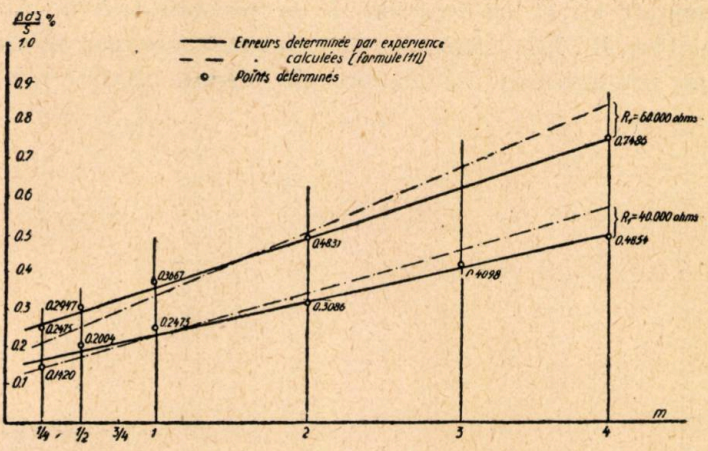


Fig. 4.

Conclusions.

La méthode de shunt pour la mesure de la résistance d'un galvanomètre ne peut pas être considerée comme un méthode de grande précision, — comme nous le montrent les résultats obtenus plus haut. Néanmoins, elle est la seule applicable dans le cas où l'on ne dispose que de deux boîtes à résistances pour cette mesure. Par conséquent, il est utile de savoir l'appliquer sans donner lieu à des erreurs relatives éxagérées.

Les formules simples établies pour l'erreur de construction et pour l'erreur de détermination, nous montrent que ces deux erreurs

croissent *avec le rapport* $m = \frac{S}{g}$ (*S* étant la résistance shunt, et g la résistance du galvanomètre considéré). En plus, on doit se maintenir à des valeurs basses pour *m*, pour réduire à un minimum l'erreur de méthode qui résulte du fait de l'interpolation linéaire entre deux valeurs très rapprochées S_1 et S_2, pour déterminer la valeur de *S*, obtenue d'une boîte de résistances.

D'ailleurs, on voit facilement que l'erreur de détermination doit croître avec *m*, du fait que la resistance R_2, en série avec le galvanomètre, croît avec *m*, et réduit la sensibilité du galvanomètre d'une manière qui n'est pas compensée par la croissance simultanée du shunt.

La formule simple: $\frac{\Delta_d S}{S} = \frac{\Delta a}{KE} \cdot R_1 \cdot (m + 1)$ nous permet de prédeterminer les valeurs de l'erreur de détermination pour différents rapport *m*, et en fonction de la résistance-série initiale du galvanomètre, R_1. Elle donne des valeurrs *en excès* pour *m* croissant, ce qui est prudent pour l'évaluation de l'erreur relative totale possible.

621.315.6 INSTALLATIONS ÉLECTRIQUES

ERWÄRMUNGSBERECHNUNG ELEKTRISCHER KONTAKTE.

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN UND ANALYTISCHE BEHANDLUNGSMETHODEN

von **Dr.-Ing. A. Avramescu**

Die Strombahn eines elektrischen Stromkreises ist meist durch Leiter gebildet deren Beschaffenheit und Abmessungen nicht einheitlich sind. An allen Stosstellen treten lösbare oder unlösbare Verbindungen auf, die die Stromleitung von einem Leiter zu anderen ermöglichen und sicherstellen sollen. Ausserdem sind in fast jedem Stromkreis Schalt- und Regelelemente vorhanden, die zur Unterbrechung oder Änderung des Stromes dienen. Die Erfahrung zeigte schon früh, dass an allen diesen Stellen, die wir elektrische Kontakte nennen, ein Übergangswiderstand entsteht, dessen Grösse von sehr vielen Umständen abhängt [1]). Die Auswirkung dieses Widerstandes machte sich einerseits durch die Erhöhung des Spannungsabfalles im Stromkreis, anderseits durch grössere Stromwärme bemerkbar. Bei Überströmen, wie sie in der Elektrotechnik z. B. bei Kurzschlüssen [2]) auftreten, konnte die Erwärmung der Kontakte in Verbindung mit anderen Wirkungen sehr ernsthafte Betriebsstörungen und Schäden hervorrufen. Da diese Störungen, vor etwa 2 Jahrzehnten, zur Zeit der ersten Netzzusammenschlüsse, sich nicht mit einfachen Mitteln beseitigen liessen, entstand das technische Problem der Kontakterwärmung, das im Rahmen des allgemeinen Ölschalterproblems [3]) die ersten ernsthaften Untersuchungen auslöste. Die Erklärung der verwickelten Vorgänge in der Kontaktschicht erforderte weitgehende physikalische Untersuchungen, um das prinzipielle Verhalten zu ergründen und allge-

1) *L. Binder*: Der Widerstand von Kontakten. Elektrotechn. u. Masch.—Bau 30 (1912) 781.
2) *J. Biermanns*: Überströme in Hochspannungsanlagen. Springer, Berlin 1926.
3) *R. Rüdenberg*: Kurzschlussströme im Betrieb von Grosskraftwerken. Springer, Berlin 1925.

meine Regeln aufzustellen. Wie gewöhnlich gesellte sich bald dem Experiment die Rechnung, die Erfahrungstatsachen feststellen und erweitern sollte. Die gemeinsam gewonnenen Ergebnisse bereicherten einerseits unsere physikalischen Erkenntnisse, kamen aber anderseits in der Technik auch praktisch zur Anwendung [4]).

Sehr wichtig erscheint dabei die Erfassung der praktisch vorkommenden Umstände durch die Rechnung, sowie die genaue Kenntnis der zu machenden Vernachlässigungen, da nur in diesem Falle die Ergebnisse richtig bewertet und angewandt werden können. Deshalb sollen hier die Erfahrungstatsachen nochmals vorgeführt und die Aufstellung der Rechnungsaufgabe eingehender besprochen werden. In den folgenden Teilen der Arbeit sollen dann einige Anordungen duchgerechnet werden.

Das technische Problem.

Die erste Forderung, die für Kontakte aufgestellt worden ist, betrifft sicherlich die Oberflächenbeschaffenheit und zwar sollten die Kontaktflächen möglichst gross und rein sein. Auch merkte man bald, dass die Flächenpressung ein bestimmtes Mass überschreiten muss, um einen guten Kontakt zu geben. Die Verunreinigungen die an Kontaktstellen auftraten waren meist Folgen der Verbrennung oder Verschmorren des Metalles durch Schaltfunken und Lichtbögen, traten aber nach langen Ruhepausen oder durch Witterungseinflüsse auch in Form von Oxydationsprozessen auf [5]). Ohne die Vorgänge genau zu kennen behauptete doch *Werner Siemens*, dass Kontakte erst gut eingefettet werden müssten, um überhaupt gut zu leiten.

Noch grössere Schwierigkeiten bereitete das Problem der beweglichen Kontakte [6]), wie Bürsten an Kommutatoren und Schleifringen [7]), an denen wegen der mechanischen und gleichzeitig starken elektrischen Beanspruchungen immer grössere Anforderungen gestellt wurden. Diesbezügliche Untersuchungen setzten schon sehr früh ein [8]), die Vorgänge konnten aber grundsätzlich nur viel später erklärt werden.

Die Erwärmung der Schalterkontakte trat in zwei Umständen ein, in geschlossenem Zustande beim Durchgang sehr starker Ströme

4) *F. Kesselring*: Elektrische Schaltgeräte, Anlasser und Regler. Gruyter, Leipzig 1928.
5) *R. Richter* u. *G. Schade*: Untersuchungen über die Beständigkeit von Kontaktverbindungen unter besonderer Berücksichtigung von Aluminium. ETZ 59(1938)1321.
6) *J. Liska*: Die Funkenspannung zwischen Kommutator und Bürste. ETZ 30 (1909) 82.
7) *L. Binder*: Über die Vorgänge an Bürsten, Schleifringen und Stromwendern. Wiss. Veröff. Siemens W. 2 (1922) 158.
8) *G. Dettmar*: Die günstigste Dimensionierung der Stromabnehmer bei Schleifringen und Kollektoren. ETZ 21 (1900) 429.

und beim Schalten durch Funken oder Lichbögen [9]). Besonders beim Ausschalten grosser Kurzschlussströme ist man deshalb bemüht gewesen den Lichbogen so schnell wie möglich zu löschen [10]). Es ist aber auch der Fall vorgekommen, dass die Kontakte beim Durchgang sehr starker Ströme zusammenschweissten und die Abschaltung grosser Kurzschlussströme verhinderten, wodurch umfangreiche und schwere Schäden entstanden. Alle diese Fragen sind technisch im Rahmen des Ölschalterproblems behandelt worden. Es hiess nämlich Schalter zu bauen, die den stärksten Beanspruchungen gewachsen sind. [11]) Dieses Problem ist heute als gelöst anzusehen, was nicht in kleinem Maasse den eingesetzten theoretischen und physikalischen Untersuchungen zu verdanken ist.

Das physikalische Problem.

Die erste Arbeit, die das Wesen des elektrischen Kontaktes zu ergründen suchte, stammt von *L. Binder* [1]). Aus makroskopischen Messungen wurde nachgewiesen, dass der Übergangswiderstand, der beim Zusammenpressen zweier metallischen Kontaktflächen gebildet wird, *nicht* durch Fremdschichten, sondern hauptsächlich dadurch entsteht, dass die Berührung nicht flächenhaft, sondern nur punktweise stattfindet und an diesen Punkten die Stromlinien sehr stark zusammengedrängt werden. Die bestpolierte Oberfläche besitzt mikroskopisch sehr viele Unebenheiten, die beim Auflegen der Kontaktflächen zuerst in Berührung kommen. Der ganze Kontaktdruck verteilt sich dann auf diese winzigen Flächen, die bald über die Elastizitätsgrenze des Materials beansprucht werden und ins Fliessen kommen. Dadurch entstehen neue Berührungsflächen d. h. der Widerstand der Kontakte nimmt mit steigendem Druck ab [12]). *Binder* verwendet zur Erklärung der Vorgänge ein hydrodynamisches Modell, der auch für die Berechnung des Kontaktwiderstandes sehr gute Dienste leistet. Die Abhängigkeit vom Druck wurde in einer Doktorarbeit von *E. Contius* [13]) untersucht, wobei die Vorstellungen *Binders* bestätigt wurden.

Im Laufe der weiteren Untersuchungen sind zwei grundsätzliche Vorstellungen vertreten worden und zwar die der Fremdschichten, die auf Übergangswiderstände in der Kontakschicht selbst

9) *W. Hoepp*: Über Unterbrechungslichtbögen bei elektrischen Schaltapparaten. ETZ 34 (1913) 33, 55.
10) *W. Burstyn*: Ein neues Verfahren zur Löschung des elektrischen Lichtbogens. ETZ 34 (1913) 1225.
11) *F. Kesselring*: Das Schalten grosser Leistungen. ETZ 50 (1929) 1005.
12) *L. Binder*: Abhängigkeit des Berührungswiderstandes von der Zahl der Berührungspunkte. Z. techn. Physik 13 (1932) 442.
13) *E. Contius*: Der Einfluss der Grösse des Druckes und der Fläche auf den Kontaktwiderstand. Diss. T. H Dresden 1929.

führt [14]) und die der rein metallischen Leitung, wobei der Widerstand in den Leiter verlegt und aus der Einschnürung der Stromlinien entstanden gedacht wird [15]).

Nach sehr umfangreichen physikalischen [16]) und theoretischen [17]) Untersuchungen gelang *R. Holm* [18]) und seiner Mitarbeiter [19]) die Vorgänge weitgehend zu klären. Die reine metalische Leitung wird bestätigt [20]), sie findet aber streng genommen nur für in Vakuum ausgeglühte Kontakte statt. Bei den praktisch verwendeten Kontakten lässt sich die Ausbildung einer, wenn auch monomolekularen Sauerstoffschicht nicht vermeiden, die aber die Entstehung rein metallischer Kontakte nicht stören kann, da sie bei den hohen Flächenpressungen und beim Gleiten der Kontaktflächen zerdrückt wird. Einen wahren Übergangswiderstand bilden nur viel dickere Schichten u. a. die sogenannte *Rohmann*-Haut, die aus verschiedenen Oxyden besteht und den Widerstand der Kontakte beträchtlich erhöhen kann. Im Laboratorium ist durch besondere Massnahmen und bei Verwendung von schweroxydierbaren Metallen gelungen rein metallische Kontakte herzustellen, an denen das prinzipielle Verhalten nachgewiesen werden konnte. [20]).

Die Erwärmung des Kontaktes ist vom thermischen und elektrischen Verhalten des Kontaktstückes und der Umgebung (Abkühlung) abhängig. Die grundsätzliche Aufgabe besteht in der Feststellung der stattfindenden Wärmebewegung, die grösste Schwierigkeit in dem Umstand, dass die meisten Stoffwerte, unter anderen der spezifische Widerstand [21]) und die spezifische Wärme [22]) keine Konstanten, sondern von der Temperatur abhängige Grössen sind.

Die Ausführung physikalischer Untersuchungen an Kontakten gestaltet sich naturgemäss sehr schwierig [23]). Die Temperaturmessung der Kontaktschicht selbst gelingt nicht einmal mit Hilfe der feinsten und kleinsten Thermoelementen [24]). Die rein metallischen Brücken, in denen offensichtlich die höchsten Temperaturen auftreten, haben mikroskopische Abmessungen und werden durch den

---

14) *W. Hoepp*: Lichtbogenfreie Schalter für Wechselstrom. ETZ 31 (190) 2205.
15) *P. O. Pedersen*: Des microphnes et des contacts microphoniques. Lum. él. 32 (1916) 281, 33 (1916) 117.
16) *R. Holm*: Über Kontaktwiderstände besonders bei Kohlekontakten. Z. techn. Physik 3 (1922) 290.
17) *R. Holm*: Über Kontaktwiderstände Z. techn. Physik 8 (1927) 141, 9 (1928) 454.
18) *R. Holm*: Über metallische Kontaktwiderstände. Wiss. Veröff. Siemens W. 7 (1928) 252, 7 (1929) 217.
19) vgl. *R. Holm* u. *R. Störmer*: Über Kontakte zweier verschiedener Leiter. Wiss. Veröff. Siemens W 12 (1933) 61.
20) *R. Holm* u. *R. Störmer*: Eine Kontrolle des metallischen Charakters von gereinigter Platinkontakten. Wiss. Veröff. Siemens W. 9 (1930) 325.
21) *A. Avramescu*: Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Kupfer und Aluminium bis zum Schmelzpunkt. Z. techn. Physik 20 (1939) 26.
22) *A. Avramescu*: Temperaturabhängigkeit der wahren spezifischen Wärme von Leitungskupfer und Leitungsaluminium bis zum Schmelzpunkt. 20 (1939) 213.
23) *W. W. Jones*: Contact Resistance. Gen. electr. Rev. 30 (1928) 15.
24) *F. Krausz*: Über den Kontaktwiderstand. ETZ 41 (1920) 205.

Einbau der Thermoelemente zerstört. Aus diesen Gründen wurde man diesbezüglich immer mehr auf die Rechnung angewiesen.

Das analytische Problem.

Die Bewegung der Wärme in festen Körpern ist seit den grundlegenden Arbeiten von *Fourier* [25]) der Rechnung zugänglich. Die durch Mitarbeit zahlreicher namhaften Mathematiker [26]) entwickelte analytische Theorie der Wärme [27]) ist ein grosses, abgeschlossenes Werk [28]) und ein für Physiker und Techniker nützliches Werkzeug geworden [29]). Die parabolische Differentialglechung der Wärmeleitung beherrscht alle Wärmebewegungsvorgänge. Einzelne Aufgaben lassen sich durch verschiedene Anfangs- und Randbedingungen, deren Art mitsamt der entsprechenden Lösungen im allgemeinen bekannt sind, behandeln. Es können aber auch hier noch nicht bekannte Aufgaben auftreten.

Die grösste Schwierigkeit bei der Heranziehung der Rechnung besteht in der richtigen Formulierung der Aufgabe. Durch den Ansatz soll nämlich der physikalische Vorgang so treu wie möglich gekennzeichnet werden. Das ist deshalb schwer, weil einerseits die Erscheinungen in der Natur nicht einzeln sondern in zahl- und wahlloser Mannigfaltigkeit auftreten, anderseits würde die Berücksichtigung aller Umstände die Rechnung unübersichtlich, ja oft unmöglich machen. Es muss deshalb auf die Zusammenhänge zwischen den physikalisch-technischen Vorgängen und der Aufstellung der Rechnungsaufgabe besonders eingegangen werden. Auch bei der Deutung der Ergebnisse ist Vorsicht geboten, da beim Übergang von der weitgehend idealisierten Rechnung zum physikalischen oder technischen Problem noch manche vernachlässigte Umstände in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden müssen.

Eine andere Schwierigkeit, die beim Übergang von der Naturerscheinung zur höheren Mathematik auftritt, betrifft die verschiedene Einstellung des Technikers und Mathematikers zum analytischen Problem. Der Ingenieur wendet die Rechnung nur als Mittel zum Zweck an, demgegenüber sehen diejenigen, die zum Ausbau der reinen Mathematik beitragen, nur die Erweiterung der Gebiete und Methoden als Endziel an, ohne auf die Anwendungen zu achten. Ein Mathematiker macht die Formeln dimensionslos und etwaige

25) *J. B. J. Fourier*: Théorie analytique de la chaleur. Gauthier-Villars, Paris 1822.
26) *M. Poisson*: Théorie mathématique de la chaleur. Gauthier-Villars, Paris 1837.
27) *H. Poincaré*: Théorie analytique de la chaleur. Gauthier-Villars, Paris 1894.
28) *J. Boussinesq*: Théorie analytique de la chaleur. Gauthier-Villars, Paris, 1901.
29) *E. W. Hobson* u. *H. Dieselhorst*: Wärmeleitung. Encykl. math. Wiss. V (1905) 455.

physikalische Konstanten zu 1, so dass diese aus der Rechnung einfach ausscheiden [30]). Der Techniker möchte in jeder Formel eine physikalische Tatsache erblicken und kann deshalb auf die Koeffizienten und Dimensionen nicht verzichten.

Wenn wir uns nun zur mathematischen Formulierung des Kontaktproblems zuwenden, so stellt sich die Frage, ob die räumliche Anordnung und entsprechend die Wahl des Koordinatensystems einen Einfluss hat. Der Kontakt kann schlechthin flächenhaft, linienhaft oder punktförmig sein. Das Wärmeleitungsproblem ist dann entsprechend linear, zylindrisch oder kugelig. Die Form und Abmessungen der Kontaktstücke sind von sehr grosser Mannigfaltigkeit, auch kann für eine gegebene Form die Kontaktstelle und die Stromabführung an ganz verschiedenen Stellen erfolgen.

Mathematisch wird die Erwärmung aus der räumlichen und zeitlichen Änderung des elektrischen und des Temperaturfeldes berechnet. Bei der Annahme rein metallischer Kontakte entsteht die Wärme nur durch Stromwirkung im Leiter. Im Beharrungszustande decken sich hierbei Aequipotential- und Isothermflächen, was zu einer ganz bedeutenden Vereinfachung der Rechnung führt. Auf Grund der schon von *W. Meissner* [31]) entwickelten Beziehung zwischen Potential- und Temperaturfeld im Leiter, hat *R. Holm* [32]) das thermische Verhalten der Kontakte auf den Spannungsabfall zurückgeführt, wobei die Abmessungen aus der Rechnung ausscheiden. Diese Betrachtungsweise erlaubte auch die Berücksichtigung der Temperaturveränderlichkeit des spez. Widerstandes und der spez. Wärme [20]).

Im stationärem Zustande tritt überhaupt eine grosse Vereinfachung der Verhältnisse ein [33]), demgegenüber sind Ausgleicherscheinungen schwieriger zu behandeln. Das gilt für die physikalische Untersuchung ebenso wie für die analytische.

Die Rechnung gestaltet sich verschieden je nach dem der Kontaktwiderstand in den Leiter oder in die Berührungsschicht selbst verlegt wird. Bei der Annahme der rein metallischen Leitung ist die erste Rechnungsweise, bei Übergangsschichten mit höherem spezifischen Widerstand, die zweite Art am Platze. Da die metallische Berührung nur in einzelnen Punkten der makroskopischen Oberfläche erfolgt, werden die Vorgänge durch die kugelige Ausbreitung am besten erfasst. Sind aber die Berührungsflächen, wie das in der Starkstromtechnik haupsächlich der Fall ist, sehr ausgedehnt, so

30) *E. Goursat*: Cours d'Analyse mathématique. 3. éd. Gauthier-Villars, Paris III 1923 p. 287.
31) *W. Meissner*: Ann. Physik 47 (1915) 1001.
32) *E. u. R. Holm*: Charakteristiken von Kontaktwiderständen. Wiss Veröff. Siemens W. 7. (1929) 272.
33) *L. Binder*: Kurzschlusserwärmung an Verbindungs-und Schaltstücken. ETZ 53 (1932) 1241

erreichen die Stromlinien in sehr nahen Entfernung von der Kontaktschicht die Paralellströmung wieder und wir können eine lineare Wärmeleitung annehmen.

Eine sehr grosse Rolle spielt die Wärmeabgabe an die Umgebung, deren mathematische Formulierung bekanntlich grosse Schwierigkeiten bereitet. Am einfachsten ist es vom *Newton*schen Abkühlungsgesetz Gebrauch zu machen, die neueren Untersuchungen über den Wärmeübergang [34]) setzen aber diesem Gesetz enge Schranken an.

Die mathematische Aufgabe, die den Wärmeausgleichvorgang im Kontaktkörper beschreiben soll, besteht im algemeinen in der Lösung der partiellen Differentialgleichung der Wärmeleitung unter bestimmten Anfangs- und Randbedingungen. Die Integratiosmethoden sind selbst sehr zahlreich und verschieden. Ausser der klassischen Methode der Fourierschen Entwicklungen [35]) sind die Quellpunktsmethoden häufig angewendet worden, da diese für allgemeinere Verteilungsfunktionen ausdehnbar sind. Auch die Methode der komplexen Integration ist zur einfachen Ermittlung der Lösung herangezogen worden [37]). Neuerdings ist noch eine sehr wirksame und für den Ingenieur recht handliche Methode bekannt geworden, die auch für Wärmeleitungsprobleme überraschend schnell zum Ziel führt [42]), nämlich die Operatorenmethode. Ursprünglich von *Heaviside* [38]) erfunden, von anderen Forschern bewiesen [39]) und erweitert [40]) gründet sich diese Methode statt des *Fourier*schen Integrals auf die *Laplace*sche Funktionaltransformation [41]).

Die Wahl der verschiedenen Methoden ist nicht leicht und bedarf der genauen Kenntnis der physikalischen Aufgabe, der Grenzen des mathematischen Ansatzes und des Wirkungsbereiches der Lösung.

Aus der grossen Zahl der praktischen Fälle muss die Rechnung einige bezeichnende Anordnungen herausgreifen und eingehend behandeln [42]). Dabei kommt man oft auf Rechnungsaufgaben, die in Verbindung mit anderen Problemen gelöst worden und be-

---

34) *H. Gröber u. S. Erk*: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer, Berlin 1933
35) *B. Riemann*: Partielle Differentialgleichungen. Vieweg, Braunschweig 1882. S. 126.
36) *P. Frank u. R. Mises*: Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. 2 Aufl. Vieweg, Braunschweig II (1935) S. 534.
37) *H. Bucholz*: Die Lösung von Aufgaben über die Erwärmung fester Körper durch innere Wärmequellen bei eindimensionalem Wärmestrom mittels komplexen Integration. Arch. Elektrotechn. 28 (1934) 75.
38) *O. Heaviside*: Electromagnetic Theory. Benn Broth. London 1926.
39) a) *G. Giorgi*: Il metodo simbolico nello studio delle correnti variabili. Atti Assoc. elettr. ital. 8 (1904) 65.
b) *K. W. Wagner*: Über eine Formel von Heaviside zur Berechung von Einschaltvorgängen. Arch. Elektrotechn. 4 (1916) 159.
40) *J. R. Carson*: The Heaviside Operational Calculus. Bell Syst. Techn Journ. 1 (1922) 43.
41) *G. Doetsch*: Die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Springer, Berlin 1937.
42) *A. Avramescu*: Beiträge zur Berechnung drr Kurzschlusserwärmung. Diss. T. H. Dresden 1937.

kannt sind. Im Gegenteil kann oft das physikalische Problem Aufgaben ergeben, die auf ganz neue mathematische Gleichungen und Lösungen führen [43]).

Alle diese Überlegungen bezeugen die Fülle der Kenntnisse die zur rechnerischen Lösung des Problems der Kontakterwärmung notwendig sind. Aus diesen grossen Mannigfaltigkeit die der Erscheinung am besten passende Methode auszuwählen ist schon eine nicht zu unterschätzende Leistung [44]).

Die mathematische Untersuchugsmethode ist für alle Aufgaben der Technik besonders dann am Platze, wenn durch Versuche Naturerscheinungen nicht vollständig erfasst werden können, oder wenn die Zusammenhänge möglichst klar dargestellt werden müssen. Die rechnerische Behandlung der Kontakterwärmung stellt eine mathematische Aufgabe der höheren Analysis dar, deren Beziehungen zu den physikalischen Vorgängen in der Kontaktschicht bezeichnend sind. Die Hauptschwierigkeit, die zu überwinden ist, besteht nicht soviel in der Durchführung der Rechnung, d. h. der Lösung einer partiellen Differentialgleichung unter bestimmten Anfangs- und Randbedingungen, als in der passenden Wahl dieser Bedingungen zur möglichst treuer Beschreibung der natürlichen Vorgänge. Die Rechnung ist unter Berücksichtigung aller Einheiten und Stoffwerte zu führen. Vernachlässigungen, die wegen der Temperaturabhängigkeit physikalischer Grössen und der rechnerisch schwer fassbaren Einflüsse der Form und Abmesungen unerlässlich sind, müssen bei der Deutung und Anwendung der Rechnungsergebnisse unbedingt berücksichtigt werden.

43) *A. Avramescu*: Über die Erwärmung punktförmiger Kontakte bei konstanter Strombelastung. Arch. Elektrotechn. 33 (1939) 261.

44) *W. Peters*: Über die Belastungsfähigkeit von Hochstromerdungen und verwandte starkstromtechnische Erwärmungsprobleme. Diss. T. H. Berlin 1927.

621.995 TÉLÉPHONIE

AMPLIFICATEUR POUR COMMUNICATIONS TÉLÉPHONIQUES

par **Ing. Matei Gh. Marinesco**

L'auteur apporte dans le présent article de nouvelles contributions au développement du système amplificateur qu'il a décrit antérieurement.

Il s'agit d'un amplificateur pour communications téléphoniques ou radio-téléphoniques amplifiant les courants téléphoniques dans les deux sens.

On connait les difficultés que présente une telle amplification, qui ne dépasse, pour les systèmes actuellement en service la valeur de 15 db. à cause des phénomènes d'écho et d'amorçage d'oscillations. Le nouveau système, préconisé par l'auteur, annihilant ces phénomènes permet d'atteindre des amplifications beaucoup plus élevées.

C'est par l'emploi des „réactions" non-linéaires appliquées à un circuit spécial que ce resultat a été atteint. Dans le présent article le circuit original a été simplifié et réduit à ce qu'il a d'essentiel mettant ainsi mieux en évidence le principe de fonctionnement.

Introduction. Nous avons décrit dans ce même bulletin 1) un nouveau système amplificateur pour communications téléphoniques bilatérales, ayant fait ultérieurement l'objet de travaux publiés par ailleurs 2), 3), 4).

Dans ce qui suit nous ajoutons de nouvelles contributions au développement du nouveau système que nous préconisons.

La fig. 1 représente ce que nous avons appelé un *„termineur"*. C'est l'organe qui dans un système amplificateur bilatéral fait la liason entre le circuit télephonique à deux fils et à double voie, aboutissant en C et les deux circuits à deux fils et à voie unique aboutissant en E et partant de F respectiement et dont le sens est indiqué sur la figure par des flèches.

A_c, A_c' A_2 sont des amplificateurs caractérisés par les coéfficients d'amplifications α_c, α_c', α_2 dont le sens est également indiqué par des flèches. B_c, B_c' sont des réseaux „passifs" ou „actifs" dont la „perte" ou le „gain" est réglé par l'amplitude des tensions: V_c et V_c' respectivement. Leur rôle est de produire une *„contre-réaction"*

5) variable (en amplitude) sur A_c et A_c'. De plus, la tension V_E appliquée à l'entrée de A_c est égale et de signe contraire à la tension V_E appliquée à l'entrée de A_c'.

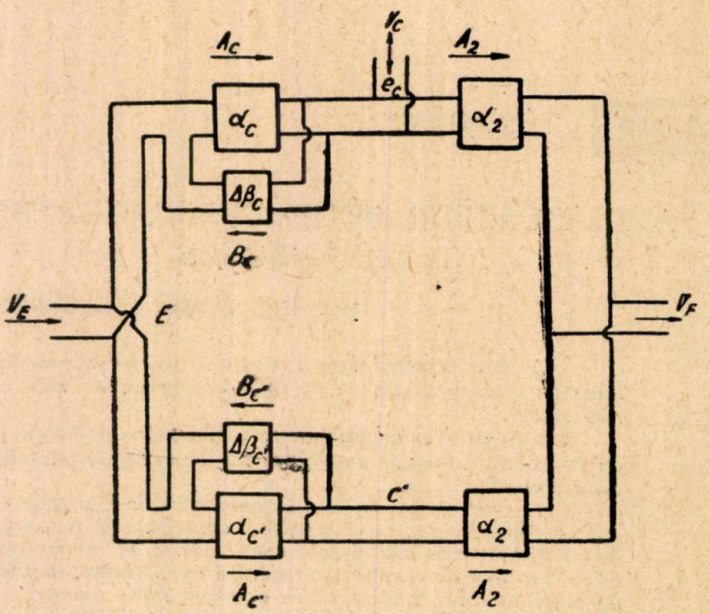


Fig. 1.

Une première différence avec le „*termineur*" décrit antérieurement réside dans la suppression du réseau: C, produisant une „*réaction*" entre F et E.

Remarque. Dans l'analyse qui suit, comme d'ailleurs dans les articles antérieurs, nous traitons seulement le cas du régime sinusoïdal permanent. Celui du régime variable (transitoire) sera développé ultérieurement. D'ailleurs, ce dernier cas n'apporte pas de modification esentielle aux résultats obtenus.

Calcul de: $|V_c|_{e_c=0}$. Employant les notations antérieures, $|V_c|_{e_c=0}$, que nous avons appelé „*tension directe*", est l'amplitude de la tension produite en C, quand on applique en E, une tension d'amplitude V_E.

Nous obtenons la relation bien connue:

$$|V_c|_{e_c=0} = \frac{\alpha_c}{1+\alpha_c|\Delta\beta_c|_{e_c=0}} B_E \qquad (1)$$

Posons:

$$|\Delta\beta_c|_{e_c=0} = k|V_c|^n_{e_c=0} \qquad (2)$$

(Nous voyons ici une seconde différence avec le „*termineur*“ décrit antérieurement ou:

$$|\Delta\beta_c|_{e_c=0} = \beta(1+k|V_c|_{e_c=0}).)$$

et supposons que:

$$\alpha_c|\Delta\beta_c|_{e_c=0} \gg 1 \qquad (3)$$

Nous obtenons par substitution dans (I):

$$|V_c|_{e_c=0} \cong \sqrt[n+1]{\frac{V_E}{k}} \qquad (1')$$

De même (3), devient:

$$\alpha_c \sqrt[n+1]{kV_E^n} \gg 1 \qquad (3')$$

Eliminant k entre (I') et (3'), nous obtenons:

$$\alpha_c V_E \gg |V_c|_{e_c=0} \qquad (3'')$$

La relation (I') nous montre que la tension: $|V_c|_{e_c=0}$, ne dépend plus de α_b et par suite des constantes de la ligne téléphonique, — de plus elle subit ce qu'on apelle un réglage automatique de volume, puisque:

$$\frac{|V_c|_{e_c=0}}{V_E} = a_{CE} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{kV_E^n}}$$

Calcul de: $|V_F|_{e_c=0}$. Nous avons:

$$|V_F|_{e_c=0} = \alpha_2(V_e - V_c')_{e_c=0} \qquad (4)$$

Nous allons calculer, dans l'hypothèse où: $\left\{\begin{matrix}\alpha_{c'} \cdot \Delta\beta_{c'} \\ \alpha_c \cdot \Delta\beta_c\end{matrix}\right\}_{e_c=0} \gg 1$, la valeur plus exacte de $|V_c|_{e_c=0}$ et $|V_{c'}|_{e_c=0}$.

Partant de (I) et (2) nous pouvons écrire pour: $|V_c|_{e_c=0}$:

$$\alpha_c k|V_c|^{n+1}_{e_c=0} + |V_c|_{e_c=0} - \alpha_c V_E = 0$$

posant: $|V_c|_{e_c=0} = \sqrt[n+1]{\frac{V_E}{k}} - \Sigma$, avec: $\Sigma \ll \sqrt[n+1]{\frac{V_E}{k}}$ (5)

$$\Sigma = \frac{\sqrt[n+1]{\frac{V_E}{k}}}{1+(n+1)\alpha_c k \sqrt[n+1]{\left(\frac{V_E}{k}\right)^n}} \cong \frac{\sqrt[n+1]{\frac{V_E}{k}}}{(n+1)\alpha_c k \sqrt[n+1]{\left(\frac{V_E}{k}\right)^n}}$$

il vient, après développement du binôme suivant les puissances de ε et en négligeant les termes en ε^2, ε^3 etc.
d'où enfin remplaçant dans (5):

$$|V_{c|e_c=0}| = \sqrt[n+1]{\frac{V_E}{k}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)\alpha_c \cdot k \sqrt[n+1]{\left(\frac{V_E}{k}\right)^n}}\right) \qquad (6)$$

Nous aurons de même pour $|V_{c'}|_{e_c=0}$:

$$|V_{c'}|_{e_c=0} = \sqrt[n+1]{\frac{V_E}{k}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)\alpha_{c'} \cdot k \sqrt[n+1]{\left(\frac{V_E}{k}\right)^n}}\right) \qquad (6')$$

Introduisant les valeurs de V_c et $V_{b'}$ données par (6) et (6'), dans (4), nous obtenons:

$$|V_E|_{e_c=0} = \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_{c'}} - \frac{1}{\alpha_c}\right) \frac{1}{(n+1)k^{\frac{2}{n+1}} \sqrt[n+1]{E^{n-1}}} \qquad (7)$$

Cette relation peut encore s'écrire, si: $\alpha_c > d'$:

$$|V_F|_{e_c=0} < \frac{1}{(n+1)\alpha_{c'}} \frac{1}{|\Delta\beta_c|_{e_c=0}} \cdot \frac{\alpha_2}{|\Delta\beta_c|_{e_c=0}} \cdot V_E \qquad (7')$$

Dans nos travaux antérieurs, nous avons appelé $|V_F|_{e_c=0}$, *tension de retour* nous voyons d'après (7'), qu'elle est indépendante de α_c et qu'elle peut être rendue, par rapport à la tension directe, voir (1') aussi petite qu'on le veut, pourvu que $\alpha_{c'}$ soit suffisament grand. Nous allons appeler: $1/(n+1)d_{c'}$ $(\Delta\beta_c)$ c $=0$, „*facteur de réduction*" de la *tension de retour*.

Calcul des tensions directes: $|V_c|_{V_E=0}$, $|V_F|_{V_E=0}$

Nous allons supposer maintenant qu'on applique en C une f. e. m „e_c".

Nous aurons alors:

$$|V_F|_{V_E=0} = \alpha_2 |V_c|_{V_E=0} = \alpha_2 \frac{e'_c}{1 + \alpha_c |\Delta\beta_c|_{V_E=0}} \qquad (8)$$

ou: $e'_c = \frac{R_i}{R_i + z_c} e_c$; — ($R_i$ = résistance interne de A_c, Z_c = impédance de la ligne vue de C)

si: $$\alpha_c |\Delta\beta_c|_{V_E=0} = \alpha_c k |V_c|^n_{V_E=0} \ll 1 \qquad (9)$$

on a: $$|V_F|_{V_E=0} \cong \alpha_2 |V_c|_{V_E=0} = \alpha_2 e'_c \qquad (8')$$

et l'innéquation (9) devient:

$$\alpha_c k e'^n_c \ll 1 \qquad (9')$$

La relation (8') nous montre que: $V|V_F|_{V_E=0}$ = ne dépend plus de α_c et par suite de l'impédance de la ligne.

Compatibilité. Voyons maintenant quelles sont les conditions pour que les deux innéquations: (3) et (9) soient satisfaites en même temps.

Eliminant k entre (3') et (9'), il vient:

$$\frac{1}{\alpha_c^{n+1} V_E^n} \ll k \frac{1}{\alpha_c e'^n_c}$$

d'ou: $$e'_c \ll \alpha_c V_E \qquad (10)$$

En comparant (10) avec (3") nous remarquons que: 1°) On ne peut déduire auqune relation nécessaire entre $|V_c|_{e_c=0}$, et e'_c, — 2°) mais si

$$|V_c|_{e_c=0} \geq e'_c \,, \qquad (10)$$

devient une conséquence de (3").

Or, la condition: $|V_c|_{e_c=0} \geq e'_c$, est realisée en pratique, puisque la f. e. m. „e'_c" arrivant de la ligne au termineur est inférieure à la tension amplifiée $|V_c|_{e_c=0}$, partant du termineur vers la ligne.

Il y a donc parfaite compatibilité entre les deux conditions: (3) et (9).

Combinaison de 2 termineurs, dans une liaison téléphonique à 2 fils. Pour obtenir une amplification bilatérale sur circuits à deux fils, nous allons associer deux „*termineurs*" identiques T_c, T_c, ainsi que le montre la fig. 2.

Fonctionement avec suppression de la „tension de retour".

Nous allons considérer le fonctionnement d'un pareil système dans le cas où la *tension de retour* est supprimée, ce qui supprime le phénomène d'écho ainsi que la possibilité d'accrochage.

Comme nous l'avons montré dans nos travaux antérieurs, ceci est possible grâce à la différence d'amplitude entre les *tensions directes* et la *tension de retour*, qui peuvent être séparées l'une de l'autre au moyen de *filtres d'amplitude*.

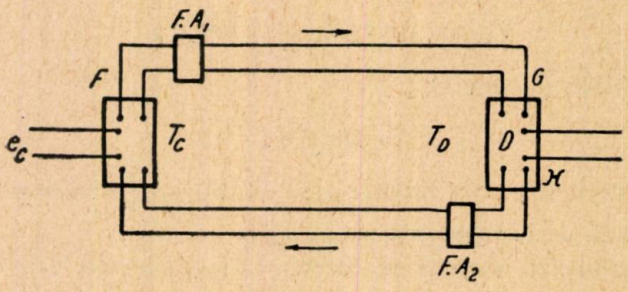


Fig. 2.

Si l'on applique en *C* une f. e. m. „e_c" celle-ci passera à travers le *filtre d'amplitude F. A.*, et produira en *D* une tension amplifiée $V_{D|e_D=0}$, et en *H* une *tension de retour* $|V_H|_{c_D=0}$ qui sera empêchée à prendre la voie de retour *D.-H.-E-C*, par le filtre *F.* A_2. Pour qu'il en soit ainsi il faut que:

$$|V_F|_{V_E=0} > |V_H|_{e_D=0} \qquad (11)$$

si l'on suppose les 2 filtres *F. A*, et *F.* A_2 identiques.

La relation (II) peut encore s'écrire ,en tenant compte de (7) et (8'):

$$\alpha_2 e'_c = m\alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_{D'}}-\frac{1}{\alpha_D}\right)\frac{1}{(n+1)k^{\frac{2}{n+1}}\cdot\alpha_2^{\frac{n-1}{n+1}}\cdot e'^{\frac{n-1}{n+1}}_c} \qquad (11)$$

où: $m \geq 1$.

Multipliant: (II') par: $k e_c^{n-1}$, il vient:

$$\alpha_2 k e_c^n = \left(\frac{m}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\alpha_2^{\frac{-n+3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_{D'}}-\frac{1}{\alpha_D}\right)^{\frac{n+1}{2}} \qquad (11'')$$

D'autre part en écrivant (11') nous avons implicitement admis que:

$$\alpha_c k e'^n_c = \Sigma \quad , (\Sigma \ll 1) \qquad (12)$$

et que:

$$\alpha_D k |V_D|^n_{e_D=0} = \eta \quad , (\eta \gg 1) \qquad (13)$$

(voir aussi les relations: (3) et (9'))

Mais d'après (1') et (8'), nous avons, puisque

$$|V_D|_{e_D=0} = \sqrt[n+1]{\frac{\alpha_2 e'_c}{k}} = a_{cD} \cdot e'_c \; ; \left(\text{où : } a_{cD} = \sqrt[n+1]{\frac{\alpha_2 \alpha_c}{\Sigma}}\right) \quad (14)$$

(14), nous montre que a_c, est l'amplification dans le sens $C \rightarrow D$.

Eliminant $|V_D|_{e_D=0}$ entre (13) et (14):

$$\alpha_D k e'^n_c \cdot a^n_{cD} = \eta \quad (13')$$

Eliminant: $k e'^n_c$ entre (12) et (13),:

$$\frac{\alpha_D}{\alpha_c} \cdot \Sigma \cdot a^n_{cD} = \eta \quad (15)$$

De l'équation de définition de a_1, (voir (14)), et de (15), nous obtenons pour Σ et η les expressions:

$$\begin{cases} \Sigma = \dfrac{\alpha_2 \alpha_c}{a^{n+1}_{cD}} & (12') \\ \eta = \dfrac{\sigma_2 \alpha_D}{a_{cD}} & (13'') \end{cases}$$

Ce qui implique: $a_{cD} > 1$.

Eliminant: Σ, entre (II") et (12), nous obtenons enfin:

$$m = (n+1) \frac{\alpha_2^{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \alpha_c^{\frac{2}{M+1}}}{\left(\frac{1}{\alpha_{D'}} - \frac{1}{\alpha_D}\right) \cdot a^2_{cD}} \quad (16)$$

Dans le cas particulier où: $\alpha_c' = \alpha_{D'} = \alpha_2$; $\alpha_c, \alpha_D \geq \alpha_2$, nous aurons:

$$\begin{cases} 1 \gg \Sigma \geq \dfrac{\alpha_2^2}{a^{n+1}_{cD}} & (12'') \\ \eta \geq \dfrac{\alpha_2^2}{a_{cD}} \gg 1 & (13''') \end{cases}$$

$$m \geq (n+1)\left(\frac{\alpha_2}{a_{cD}}\right)^2 = (n+1)|\Delta\beta_D|^2_{e_D=0} \quad (16')$$

avec:

$$|\Delta\beta_D|_{e_D=0} = k|V_D|^n_{e_D=0} = \alpha_2^{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \sqrt[n+1]{\alpha_2 k e'^n_e} \quad (17)$$

Calcul du termineur. Nous avons maintenant tous les éléments

pour calculer le „*termineur*" d'un système de 2 termineurs d'une liaison téléphonique.

Si l'on se donne „a", k, n, m, et e_c nous n'aurons qu'à porter ces valeurs dans (16'), ce qui nous donne pour: α_2

$$\alpha_2 \leq \left(\frac{m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a$$

Introduisant cette valeur de α_2, dans (12") et (13"), nous obtenons la relation de condition entre: m, n, a. :

$$m\sqrt{(n+1}\, a^{n-1} < 1 < a \cdot m\sqrt{(n+1)}$$

BIBLIOGRAPHIE

1) *M. Marinesco.* „Un nouveau système amplificateur" (B.S.P. Nr. 1, 2, 3 1938—39).
2) *M. Marinesco.* „A new two-wire. four-wire control-terminal" (Wireless Engineer. March 1940).
3) *M. Marinesco.* „Two-way Radio-Téléphony". Wireless Engineer. April 1940)
4) *M. Marinesco.* „Nou principiu în realizarea amplificătorilor telefonici (A. R. S. Febr. 1940).
5) *M. Marinesco.* „La réaction en basse fréquence„ (l'Onde Électrique Juillet, 1936).

621.396.66 RADIOTECHNIK

DYNAMISCHE KENNLINIEN DES C-VERSTÄRKERS

von **Dr. Ing. T. Tănăsescu**

Im Falle eines C-Verstärkers, wird die Trassierung der dynamischen Kennlinien angezeigt. Man betrachte die Arbeitskennlinie für Momentanwerten, Grundwellen und Oberwellen, in drei Ebenen $I_p - V_p$, $I_p - V_g$ *und* $V_p - V_g$.

Solange ein Verstärker als ein A—Verstärker arbeitet, sind die Schwankungen der Anodenspannung, der Gitterspannung und des Anodenstromes sinusförmig; dieses, in einer ersten Annäherung, da die Kennlinien der Röhre keine Geraden sind. Wenn der aüssere Widerstand ein einfacher Wirkwiderstand ist, sind diese Schwankungen gleichphasig, oder gegenphasig, so dass die entsprechende Arbeitskennlinie der Röhre, wie est bekannt ist, Abschnitte einer Geraden sein werden, welche auch immer die Ebene sein mag, in der sie dargestellt sind:

$$I_p—V_g,\ I_p--V_p \text{ oder } V_g—V_p.$$

Im Falle eines C—Hochfrequenzverstärkers (Abb. 1) werden die Spannungsschwankungen von V_g und V_p sinusförmig bleiben, aber diejenige von I_p werden nicht mehr sinusförmig sein.

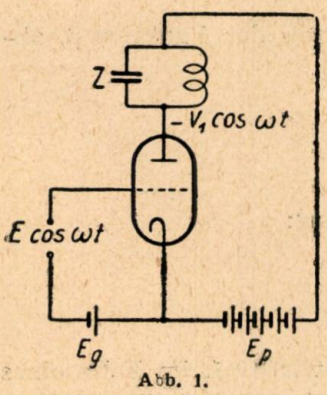


Abb. 1.

Wenn man annimmt, dass die Röhre eine gerade Kennlinie hat:

$$I_p = S(V_g + DV_p) = S\varepsilon$$

dann werden die Schwankungen des Stromes I_p, Abschnitte einer Sinusoide sein (Abb. 2) von der Amplitude I'_1 und der Öffnung 2θ

$$I'_1 = S\varepsilon_1$$

$$\cos \theta = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}$$

wo:

$$\varepsilon_0 = DE_p - E_g$$

und:

$$\varepsilon_1 = E - DV_1$$

(Notierung aus der Abb. 1).

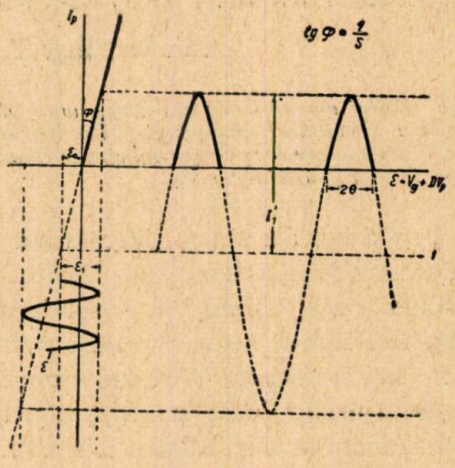


Abb. 2.

Der nicht sinusförmige Anodenstrom, besteht aus einem Gleichstrom, Mittelbestandteil I_0, einer Grundwelle I_1 und einer Reihe von Oberwellen.

Die Grundwelle ist von I' und θ, mittels der Funktion β, abhängig:

$$\beta = \frac{\pi}{\theta - \sin\theta \cos\theta}$$

Tatsächlich, haben wir die einfache Beziehung:

$$I_1 = \frac{I'_1}{\beta}$$

Im Falle eines A—Verstärkers haben wir $\beta = 1$, im Falle eines B—Verstärkers haben wir $\beta = 2$ und im Falle eines C—Verstärkers wächst der Wert β, je kleiner der Winkel θ wird; in der Abb. 3. ist die Variation von β mit θ, gezeigt.

Während beim A—Verstärker, die Neigung der Kennlinie nur von dem Anodenwiderstand Z abhängt, ist beim C—Verstärker, die Kennlinie auch von θ abhängig.

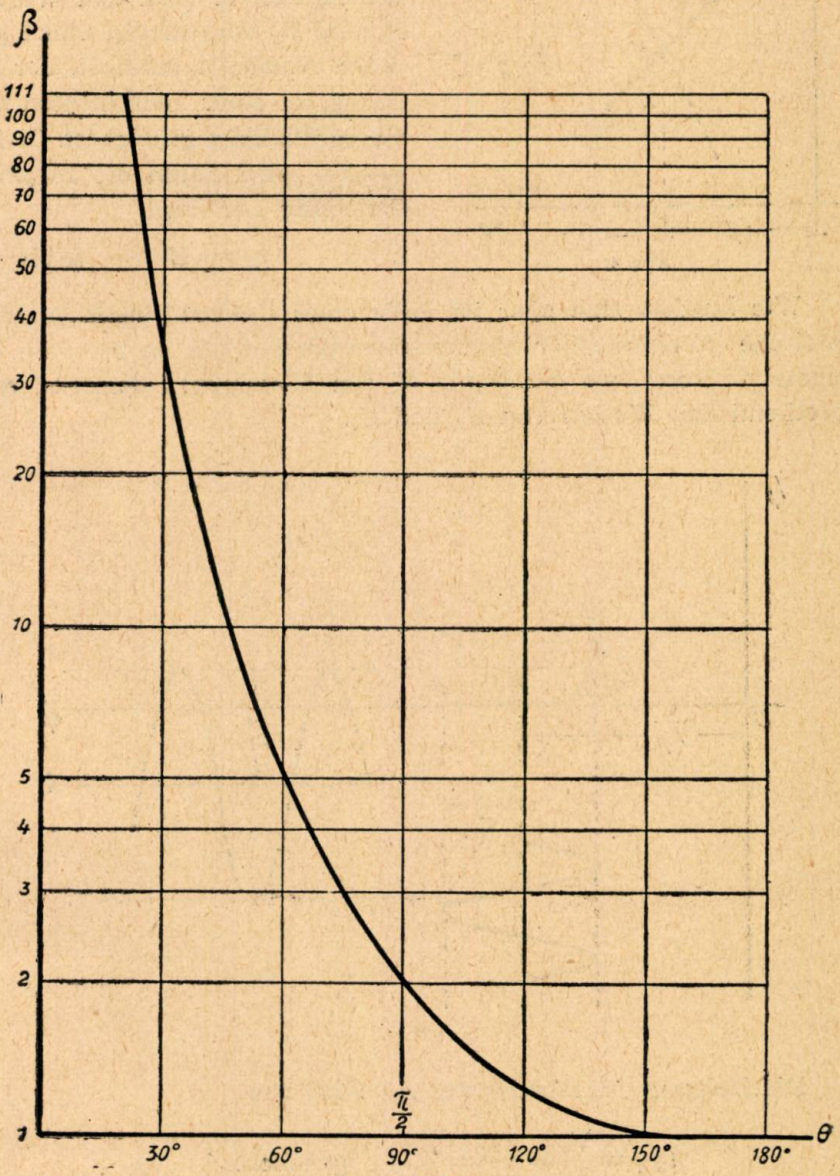


Abb. 3.

Betrachten wir erstens die Ebene I_p—V_g. Nehmen wir an, um einfacher zu sein, dass Z ein einfacher Wirkwiderstand ist.

Im Falle eines A—Verstärkers, wird die Trassierung der dynamischen Kennlinien, einfach gemacht, indem man durch den Mittelpunkt M (von den Werten E_p und E_g dargestellt), einen geraden Abschnitt trassiert, der im Bezug, zu einer Senkrechten mit einem Winkel φ geneigt ist. Dieser Winkel wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

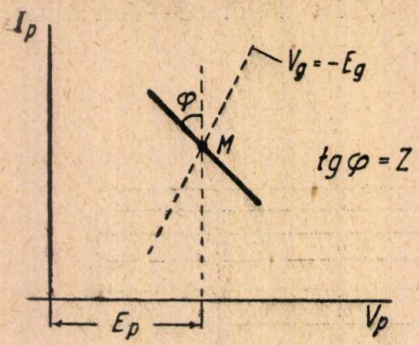


Abb. 4.

$$tg\varphi = Z \qquad \text{(Abb. 4).}$$

Wie handelt man aber im Falle eines C-Verstärkers? Die dynamische Kennlinie der Momentanwerten hat die, in der Abb. 5. angezeigte Form, wo der Punkt M den Mittelpunkt darstellt, entsprechend den Werten von E_p und E_g.

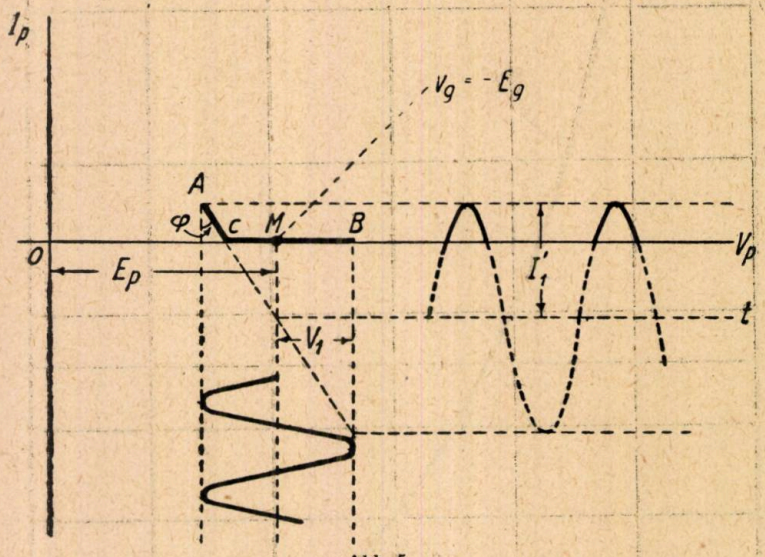


Abb. 5.

Die Neigung des Abschnittes AC wird von

$$tg\varphi = \frac{V_1}{I'_1} = \frac{ZI_1}{\beta I_1} = \frac{Z}{\beta} \qquad \text{gegeben.}$$

Diese Neigung hängt nicht nur von Z, sondern, auch von θ ab. Für derselben Wert von Z, je θ sich vermindert desto mehr neigt sich der Abschnitt AC zur Senkrechten.

Was die Darstellung des Punktes C anbetrifft, die ist durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{\overline{CM}}{V_1} = \cos\theta$$

da V_1 und θ als bekannt angenommen werden. Die Arbeitskennlinie derart trassiert, entspricht den Momentanwerten.

Wenn wir uns jetzt das Problem stellen, die entsprechende individuelle dynamische Kennlinie für die Grundwelle und die Oberwellen in der Ebene ${}_pI—V_p$ zu bestimmen, so werden wir mit dem Mittelpunkte $M\ (E_p,\ I_0)$ anfangen. (Abb. 6).

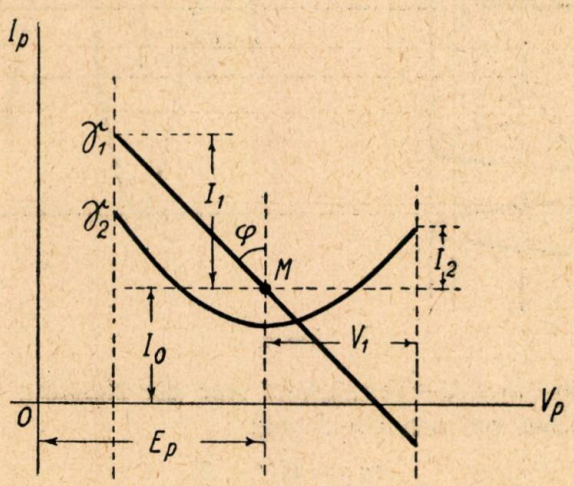


Abb. 6.

Die Grundwelle wird eine dynamische Kennlinie γ_1 haben, die ein gerader Abschnitt ist, der im Bezug zu einer Senkrechten mit einem von der Gleichung $tg\varphi = Z$ bestimmten Winkel φ geneigt ist.

Die zweite Oberwelle hat eine dynamische Kennlinie γ_2 die ein Parabelabschnitt ist. Jede Oberwelle wird in dieser Weise je eine dynamische Kennlinie bestimmen.

Wenn man in jedem Moment, I_0 mit den Ordinaten der Kennlinie der Oberwellen, von der Wagrechten des Punktes M abbemessen, zusammenzählt, bekommt man den entsprechenden Momentanwert von I_p aus der dynamischen Kennlinie der Abb. 5.

Betrachten wir jetzt die dynamische Kennlinien in der Ebene $I_p—V_g$. Zuerst, wird die dynamische Kennlinie der Momentanwerten wie in der Abb. 7. aussehen.

Die Neigung des Abschnittes CA in Verhältnis zu der Senkrechten ist von der Gleichung

$$tg\varphi = \frac{E}{I'_1} = \frac{I_1 D(Z \pm \beta\rho)}{\beta I_1} = D(\rho + \frac{Z}{\beta})$$

gegeben.

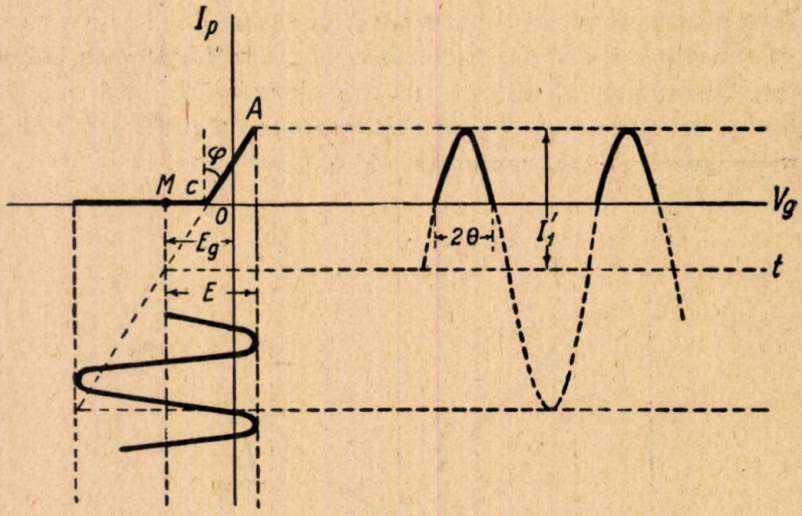


Abb. 7.

Im Falle eines C—Verstärkers war die Neigung der dynamischen Kennlinie von den Gleichung:

$$tg\varphi = D(\rho + Z)$$

gegeben.

Im Falle des C—Verstärkers, hängt die Neigung des Abschnittes CA nicht nur von Z, sondern auch von θ ab. Je sich θ vermindert, desto nährert sich CA, als Richtung, der statischen Kennlinie $V_g = ct$, welche ein steiles $tg\varphi = D\rho$ im Bezug zu der Senkrechten hat.

Was die partiellen dynamischen Kennlinien der Oberwellen in der Ebene I_p—V_g anbetrifft so werden diese sich gleichfalls, wie im vorigen Falle anordnen, wo man die Kennlinien in der Ebene I_p—V_p behandelt hat.

Manchmal werden auch in der Ebene V_g—V_p Darstellungen gemacht; in diesem Falle haben wir den Vorteil, dass die beiden Grössen V_g und V_p die auftretenden, sinusförmige Schwankungen haben. Deswegen wird die entsprechende dynamische Kennlinie der Momentanwerten nicht mehr eine gebrochene Linie sein, sondern ein gerader Abschnitt. Abb. 8.

Die Neigung des geraden Abschnittes wird von der folgenden Gleichung bestimmt:

$$tg\varphi = \frac{V_1}{E} = \frac{ZI_1}{DI_1(Z+\beta\rho)} = \frac{Z}{D(Z+\beta\rho)}$$

Auch in diesem Falle hängt die Neigung der Kennlinie nicht nur von Z, sondern auch von θ ab. Je grösser Z wird um so mehr wächst auch φ, und die dynamische Kennlinie neigt sich zu einer Wagerechten.

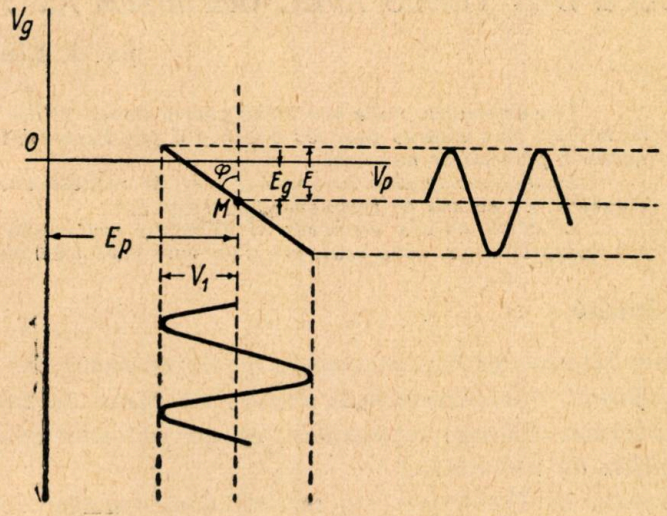


Abb. 8.

In der Tat, ist der Winkel zu welchen φ strebt, nicht $\frac{\pi}{2}$ sondern kleiner, nähmlich:

$$tg\varphi = \frac{1}{D}$$

φ in dieser Weise bestimmt, entspricht in diesem Diagramm der Neigung der Kennlinien $I_p = ct.$ Je mehr sich θ vermindert, so strebt die dynamische Kennlinie zur Senkrechten.

Das Studium des C—Verstärkers und die Darstellung seines Betriebs in der Ebene V_g—V_p ist vorteilhaft, weil die dargestellten Grössen sinusförmige Schwankungen haben. Für alle obenstudierte Fälle werden in der Praxis entsprechende Korrekturen gemacht, wenn wir die Kennlinien der Röhre nicht als gerade Linien betrachten können z. B, wenn wichtige Gitterströme auftreten, die die Scheitelerte Anodenstromes vermindern, oder wenn die Anodenimpedanz auch eine induktive Komponente hat.

623.42 BOUCHES À FEU

LE CALCUL DES TUBES AVEC CHEMISES AMOVIBLES

par **I. Linteş**

Les exigences modernes d'une guerre imposant des conditions de tir bien plus sévères pour les bouches à feu, l'usure de l'âme commence à préoccuper vivement.

La solution la plus économique est de réaliser une chemise amovible qui permet de remplacer l'intérieur usé.

Le calcul de ces chemises étant encore susceptible de diverses interprètations, nous essayons d'indiquer deux méthodes.

Généralité.

Les tirs intenses et l'augmentation de la puissance des bouches à feu accelèrent considérablement l'usure de l'âme de tubes. Par suite la précision diminue rapidement, ce qui entraîne une grande consommation de munitions.

Par raison de l'économie, on devrait donc changer seulement la partie usée, c'est-à-dire l'âme, les solutions possibles étant:

— changer le tube, sans culasse;

— changer le demi tube;

— changer sulement l'intérieur, c'est-à-dire la chemise.

La première solution est facile à réaliser, mais est assez coûteuse. La dernière est très économique, mais le calcul est mal connu. La seconde solution n'est qu'un compromis entre la première et la dernière solution.

Nous allons tacher de donner une méthode de calcul des chemises amovibles.

Le calcul des tubes avec chemises amovibles par analogie avec le fréttage;

Le calcul dans l'hypothèse de St. Venant et Poncelet.

Soient: *Po* la pression à l'intérieur du tube, P_1 la pression à l'intérieur du manchon, *So* et S_1 les sollicitations respectives, u_1 et u_2 les rapports des rayons extérieurs aux rayons intèrieurs de la chemise et du manchon et m le coefficient de *Poisson*.

Alors, les rélations d'un tube frétté nous permettent d'écrire:

$$1) \quad \begin{cases} S_0 = \dfrac{m-1}{m} \cdot \dfrac{P_0 - y_1 \cdot P_1}{y_1 - 1} \\ S_1 = \dfrac{m-1}{m} \cdot \dfrac{P_1}{y_2 - 1} \end{cases}$$

ayant:

$$y_1 = \frac{2m \cdot u_1^2}{(m+1) \cdot u_1^2 + m - 1} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{2m \cdot u_2^2}{(m+1) \cdot u_2^2 + m - 1}$$

Soient maintenant: σ_0 la résistance admissible à la déformation élastique du métal de la chemise et σ_1 celle du manchon, alors nous allons prendre:

$$2) \quad \begin{cases} S_0 = \sigma_0 \\ S_1 = \sigma_1 - E \cdot \gamma \end{cases}$$

E étant le module d'élasticité et y le jeu de montage de la chemise.

En éliminant P_1 et en explicitant y_2, on obtient:

$$3) \quad y_2 = \frac{\dfrac{m-1}{m} \cdot P_0 - (y_1 - 1)\sigma_0}{y_1(\sigma_1 - E)} + 1$$

Cette relation nous permet de calculer le manchon, quand on connaît la chemise et les résistances admissibles aux déformations élastiques.

Le calcul dans l'hypothèse de Von Mises.

Nous savons de même que:

$$4) \quad \begin{cases} S_0 = \dfrac{u_1^2}{u_1^2 - 1} \cdot (P_0 - P_1) \cdot \sqrt{3} \\ S_1 = \dfrac{u_2^2}{u_2^2 - 1} \cdot P_1 \cdot \sqrt{3} \end{cases}$$

En tenant compte des rélations 2) et en éliminant P_1, on obtient:

$$5) \quad u_2 = \sqrt{\frac{\sigma_1 - E \cdot \gamma}{\dfrac{u_1^2 - 1}{u_2^2} \cdot \sigma_0 - P_0\sqrt{3} + \sigma_1 - E\gamma}}$$

Le calcul des tubes avec chemises amovibles par la méthode de la distribution des pressions.

L'hypothèse de St. Venant et Poncelet.

Soient P_0 la pression intérieure, P_0' la pression nécessaire pour déformer élastiquement la chemise jusqu'à ce que le jeu sera annulé et $(P_0 - P_0')$ la différence de pression qui reste pour l'ensemble chemise-manchon. Alors les sollicitations seront:

$$6) \qquad \begin{aligned} S_0 &= S_{P_0'} + S_{P_0 - P_0'} \\ S_1 &= S_{P_0 - P_0'} \end{aligned}$$

Or, pour annuler le jeu entre la chemise et le manchon on doit avoir:

$$7) \qquad P'_0 = \frac{1}{2}(u_1^2 - 1) \cdot E\gamma$$

Et puis on arrive aux rélations suivantes:

$$8) \qquad \begin{cases} T_0 = \dfrac{(m+1)u_1^2 + (m-1)}{2m} \cdot E\gamma + \sigma_1 \\ T_1 = \dfrac{(m+1)u_2^2 + (m-1)}{m(u_2^2 - 1)} \cdot \left[P_0 - \dfrac{1}{2}(u_1^2 - 1).E\gamma\right] \end{cases}$$

Ce qui nous permet de déduire:

$$9) \qquad u_2 = \sqrt{\frac{m\sigma_0 + (m-1)P_0 - m.u_1^2 E\gamma}{m\sigma_0 - (m+1)P_0 - mE\gamma}}$$

L'hypothèse de Von Mises

De même, nous avons:

$$10) \qquad \begin{cases} \sigma = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot u_1^2 \cdot E\gamma + \sigma_1 \\ \sigma_1 = \dfrac{u_2^2}{u_2^2 - 1} \cdot \left[P_0 - \dfrac{1}{2}(u_1^2 - 1)E\gamma\right]\sqrt{2} \end{cases}$$

Donc on obtient:

$$11) \qquad u_2 = \sqrt{\frac{\sigma_0 \dfrac{\sqrt{3}}{2} u_1^2 E\gamma}{\sigma_0 - P_0\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.E.\gamma}}$$

Remarques.

1). Dans les rélations 1) et 4) nous pourrions remplacer P_1 par

la différence $(P_0 - P_0')$ mais on doit tenir compte que dans le cas du fréttage, P_1 diminue pendant le tir, pouvant devenir *zéro* où même négatif, tandis-que dans le cas d'une distribution des pressions, P_1 croît de *zéro* à P_1.

2). La méthode de la distribution des pressions est dûe à *M. Schwinning* („*Konstruktion und Werkstoff der Geschützröhre und Gewehrläufe*", mais quelques hypothèses qui diffèrent de celles que nous avons admises, ont conduit à des résultats un peu différents.

3). Il est intéressant maintenant de comparer par calculs numériques les deux méthodes que nous avons indiquées.

4). Nous avons envisagé encore une hypothèse sur les rélations 2), mais les résultats seront publiés plus tard.

631.16 ECONOMIE AGRICOLE

EINIGE ANBLICKE DER RUMANISCHEN LANDWIRTSCHAFT DER DONAUEBENE

Von Dr. **Nicolae Cornăţeanu**

Zusammenfassung. *Der Verfasser stellt uns in kurzem die Ergebnisse der, in den letzten 10 Jahren, seitens der Sektion für landwirtschaftliche Betriebslehre des rumänischen Landw. Forschungsinstitute unternommenen Studien vor.*

Derselbe beschränkt sich hier nur auf die Verhältnisse der bäuerlichen Landwirtschaft in der Donauebene, weil dieses Gebiet die typischeste Region der rumänischen Landwirtschaft bildet. Er zieht aus diesen Studienergebnissen die Schlussfolgerung, dass, im Vergleich zu den verwendeten Kapitalien und der geleisteten Arbeit die bauerliche Landwirtschaft unrentabel ist, weil die Verzinsung jener Kapitalien, wie auch die Entlohnung der Arbeit im allgemeinen unzureichend sind. In Anbetracht dieser Resultate schlägt der Verfasser eine Reihe von Massnahmen vor, welche zur Intensivierung und Erhebung der Rentabilität der bäuerlichen Landwirtschaft angezeigt wären, indem er überzeugt ist, dass die rumänische Landwirtschaft zu beträchtlichen Fortschritten fähig wäre.

I. **Einführung.** Unsere bäuerliche Landwirtschaft ist im allgemeinen wenig bekannt. Daher haben wir uns vorgenommen, darüber einige Anblicke aus unserem Lande in gedrängter Form — vorzulegen, u. zw. der jenigen aus der Donaubene.

Eine Darstellung der gesamten Bauernfrage können wir momentan nicht unternehmen. Es wurde nur das Gebiet der „Donauebene" gewählt, weil dasselbe — unseres Errachtens nach — das wichtigste und das urbildlichste Gebiet Rumäniens, bezüglich der landwirtschagtlichen Produktion, darstellt.

Vom Standpunkte der landwitschaftlichen Betriebslehre, versteht man unter „Donauebene" die Region, welche folgende Distrikte umfasst: den südostlichen Teil von Mehedinţi, dann Dolj, Romanaţi, Olt, Teleorman, Vlaşca und Ilfov, den westlichen Teil von Ialomitza, sowie die südlichen Gebiete von Dâmbovitza und Prahova. Nördlich ist diese Region von dem wunderschönen Hügellande be-

grenzt, wo aber verschiedene andere sehr interessante Fragen technischer, oekonomischer und sozialer Natur auftauchen. Ostlich der Donauebene schliesst sich das Baragangebiet an, welches eine ausgesprochene Steppenregion bildet. Hier haben wir wenigere Niederschläge, ein rauheres Klima und viel kürzere Ubergänge von Sommer zu Winter und umgekehrt, als in der Donauebene, zu verzeichnen. Daher gestalten sich auch die Verhältnisse in Baragan für den praktischen Landwirt im allgemeinen ungünstiger als in der Donauebene.

Die Wichtigkeit der Donauebene für die Landwirtschaft geht auch aus folgenden Tatsachen hervor: erstens, weil diese Region sehr gross: zweitens, weil die Bevölkerung sehr dicht ist.

Diese ist die typicheste Region der rumänischen Landwirtschaft, indem sie von einer ungemischten Bauernschaft bevölkert ist, welche sehr gleichartig ausgestaltet ist. Uberall finden wir hier dasselbe Wirtschaftssystem, denselben Dorftypus, sowie denselben Bauer als Aussehen und Denkart.

II. **Der Charakter der bäuerlichen Landwirtschaft.** Was versteht man, oder was muss man unter bäuerlicher Landwirtschaft verstehen? Wo hört der Bauer auf und wo fängt der Grossgrundbesitzer an?

In Texas gilt ein Farmer mit 500 Ha., welche als Viehweide benutzt werden, als kleiner Viehzüchter. In Australien kann man über einen Züchter von 2000 Schafen dasselbe sagen. Bei uns, in der Dobrogea, wird ein Bauer mit 10 Ha. Besitz als Kleinbauer benutzt werden, als kleiner Viehzüchter. In Australien kann man bauer.

Der Begriff der Bauernwirtschaft schwankt: nach Klima und Boden, nach Bevölkerungsdichte und Verkehrsmöglichkeiten, sowie nach den oekonomischen und sozialen Verhältnissen jeder einzelnen Region.

Die typische Bauernwirtschaft ist diejenige, wo die sämtlichen Arbeiten von der Bauernfamilie allein, ohne fremde Hilfe, geleistet werden.

Dort, wo die Bauernfamilie auch fremder Arbeitskräfte bedarf, kann man von einer mittelgrossen Bauernwirtschaft reden. Hingegen ist der Grossgrundbesitz dadurch gekennzeichnet, dass der Besitzer keine körperlich Arbeiten verrichtet, sondern er organisiert und leitet nur die Wirtschaft.

Es gibt aber auch Fälle, wo das Besitztum so klein ist, dass die Arbeitskräfte der Bauernfamilie nicht völlig verwendet werden können. Man spricht in diesem Falle von einem Zwergbesitz, wel-

cher als unoekonomisch betrachtet werden muss, da derselbe unfähig ist einer Bauernfamilie den Lebensunterhalt zu sichern.

Das ist aber keine typische Bauernwirtschaft mehr. Laut der im Jahre 1939 in Deutschland durchgeführten landwirtschaftlichen Zählung sind in diesem Lande 566.501 Zwergwirtschaften von weniger als einem Ha., d. h. 14,5% von der Gesamtzahl der deutschen Landgutswirtschaften; ausserdem noch 588.504 Betriebe, d. h. 15,1% vom Ganzen, welche zwischen 1—2 Ha. gross sind.

Der schweizerische Professor Dr. E. Laur betrachtet — natürlich, für die in der Schweiz gültigen oekonomischen und sozialen Verhältnisse — als Minimalgrösse einer Bauernwirschaft die Fläche von 3 ha, d. h. die Wirtschaftsgrösse, welche noch notdürftig einer Bauernfamilie den Lebensunterhalt sichern könnte Wenn wir nun dieses Minimum auf die landwirtschaftlichen Verhältnisse Deutschlands anwenden würden, dann ergebe es sich, dass ungefähr 40% der landwirtschaftlichen Betriebe unter 3 ha. gross sind, davon 1.155.000 Betriebe (aus der Gesamtzahl von 3.900.836), welche weniger als 2 Ha, haben. Alle diese Grundbesitzer können aber nicht mehr als Bauer betrachtet werden, da in diesen Fällen der Boden nur als Nebenbeschäftigung anzusehen ist. Die Haupterwerbsquelle für diese Leute besteht aus Leistungen ausserhalb der Wirtschaft, wie das Arbeiten bei den Grossgrundbesitzern, beim Holzfällen, in den Industrien, bei der Eisenbahn usw. Aber der Begriff, der Name und der Beruf des richtigen Bauers müssen rehabilitiert werden. *Bauer ist nur der jenige, welcher in seinem Grund und Boden die wahre und einzige Arbeits-und Erwerbsquelle findet.*

Die bäuerliche Landwirtschaft stützt sich auf die Familienarbeit. Das bedeutet aber nicht, dass hier das Kapital keine bedeutende Rolle zu spielen berufen ist; ebenfalls sind hier auch der Begriff des Einkommens und der Kontakt mit dem Markte nicht ausgeschlossen.

Während der Grossgrundbesitzer die Ersparnis an Arbeits kräften und das Ersetzen derselben durch verschiedene Maschinen vor Augen hat, muss hingegen der Bauer in ersten Linie dazu bestrebt sein, seine Arbeitskraft aufs beste auszunützen. Er ruft nämlich die Maschinen nur dann zur Hilfe, wenn seine eigene Arbeitskraft unzureichend ist, sowie in dem Falle, wann dieselbe ohne Anwendung der Maschinen so minderwertig wäre, dass der Erfolg seiner Wirtschaft dadurch beeinträchtigt sein würde.

Oft ist der Grossgrundbesitzer gezwungen das Anwenden von Arbeitskräften zu verringern; hingegen muss der Bauer dazu bestrebt sein, Pflanzen anzubauen, welche viel Arbeit, sowie eine sorgfältigere und aufmerksamere Behandlung beanspruchen.

In den, seitens der Sektion für landwirschaftliche Betriebslehre des rumänischen Landw. Forschungsinstitutes, unternommenen Studien haben wir hauptsächlich die Organisation, das Gepräge und die Ergebnisse der kleinen und mittleren Bauernwirtschaften bis 50 Ha. Grösse verfolgt.

Die Zwergwirtschaft unter 3 Ha. fand aber auch unsere Aufmerksamkeit. In Deutschland hingegen, werden nur diejenigen Bauernwirtschaften, welche über 5 Ha. gross sind, geprüft.

Bei der Beurteilung der Produktion und der Rentabilität jeder Wirtschaftsgruppe, müssen wir immer den Einfluss der Wirtschaftsgrösse auf diese Ergebnisse, sowie die Möglichkeit von Kapitalaufwendung in seinen Optimalgrenzen, in Betracht ziehen.

III. **Die Kapitalinvestierungen pro Ha., in den Bauernwirtschaften aus der Donauebene.** Die untersuchten Wirtschaften wurden nach Flächengrösse in folgenden Gruppen eingeteilt: bis 3 ha, von 3 bis 5 Ha., von 5—10 Ha, von 10—20 Ha. und über 20 Ha.

Unser Buchführungsjahr fängt am 1-ten März an; ebenso verfährt auch das Internazionale Landw. Institut von Rom, welches die Buchführungsergebnisse verschiedener Länder jährlich sammelt und veröffentlicht.

Unsere Forschungen geschahen auf Grund von Buchführungsbücheln und Bauernbudgets; letztere wurden von den Assistenten der Sektion für Landw. Betriebslehre an Ort und Stelle zusammengestellt.

Von 1929/30 bis 1938/39, wurden auf dieser Weise, im Ganzen 600 Bauernwirtschaften aus der Donaubene untersucht; d. h. im Durchschnitt 60 Wirtschaften pro Jahr.

In erster Linie muss man die Kapitalinvestierungen pro Ha. in Betracht ziehen. Darüber geben folgende Tabellen Aufschluss.

TABELLE I.

Die Kapitalinvestierungen der Bauernwirtschaften aus der Donauebene, pro Ha. in Lei,

Gruppe	Zahl der Wirtschaf.	Grundkapital			Zusammen	Betriebskapital				Zusamen	Total des Aktivkapitals
		Boden	Gebäude	Pflanzungen		Arbeitstiere	Nutztiere	Geräte und Maschin	Um'aufendes Kapital		
3 ha	64	25138	24544	4616	54298	1308	2149	3260	3705	10422	64720
3— 5 „	116	19933	16185	1593	37711	1474	1459	2131	2441	7506	45216
5—10 „	285	20713	15199	926	36838	1303	2915	1738	3205	9161	45999
10—20 „	112	18873	7598	1018	27489	893	1021	1493	2284	5691	33180
20—50 „	23	16248	8978	560	25786	632	3323	2078	2629	8662	34448
Total	600	100904	72504	8713	182122	5610	10867	10700	14264	41441	223563
Durchschnitt		20181	14500	1743	36424	1122	2174	2140	2852	2852	44712

TABELLE II.

Die Kapitalinvestierungen der Bauernwirtschaften aus der Donauebene pro Ha, in Verhältniszahlen (%).

Gruppe	Zahl der Wirtschaf	Grundapital			Zusammen	Betriebskapital				Zusamen	Total des Aktivkapitals
		Boden	Gebäude	Pflanzungen		Arbeitstiere	Nutztiere	Geräte und Maschin	Umlaufendes Kapital		
3— ha.	64	38.84	37,92	7,13	83,96	2,02	3,32	5,04	5,72	16,10	100%
3— 5 „	116	44,08	35,79	3,52	83,40	3,26	3,22	4,71	5,40	16,60	100%
5 –10 „	285	45,03	33,04	2,01	80,08	2,83	6,34	3,78	6,97	19,91	100%
10—20 „	112	56,83	22,90	3,07	82,85	2,69	3,08	4 50	6,88	17,15	100%
20—50 „	23	47,16	26,06	1 62	74,85	1,83	9,65	6,03	7,63	25,15	100%
Durchschnitt		45,13	32,43	3,90	81,46	2,50	4,86	4.79	4,38	18,54	100%

Aus der Untersuchung der oberen zwei Tabellen No. I und II, kann man folgendes entnehmen:

a) Die Zwergwirtschaften aus der ersten Gruppe (bis 3 Ha), haben das grösste Aktivkapital pro ha. Wie aus der Tabelle I zu ersehen ist, je grösser die Wirtschaft desto kleiner wird das Aktivkapital pro ha.

b) Das Bauten- sowie das tote Inventarkapital (Maschinen, Geräte und Wägen) sind ebenfalls in der ersten Gruppe von Wirtschaften am höchsten.

Diese Kapitalformen werden in der Landw. Betriebslehre als notwendiges Ubel, als indirekt-produktive Kapitalien, betrachtet. Die Belastung einer Wirtschaft mit solchen Kapitalien über die Optimalgrenze muss nach Möglichkeit verhütet werden. Gerade in den kleinsten Wirtschaften, mit vielen Familienmitgliedern, ist diese Kapitalform am höchsten. Die Zinsenquote, die man diesem Kapital anrechnen muss, sowie die Abschreibung und die Reparaturspesen desselben, stellen jene kleinen Bauernwirtschaften unter einem ungünstigen Lichte. Bei den Bauernwirtschaften, die über 10 Ha. gross sind, haben wir bei den Bauten eine Differenz von Lei 6265 pro Ha. und bei den Geräten und Maschinen eine solche von Lei 1767 pro Ha. weniger zu verzeichnen. Daraus dürfen wir aber nicht die falsche Schlussfolgerung ziehen, dass die Zwergwirtschaften über die nötigen Maschinen und Geräte in hinreichender Menge verfügen würden, was bei den über 10 und 20 Ha grossen Wirtschaften nicht der Fall wäre. Die Belastung ist nämlich die Folge der beschränckten Flächengrösse jener Wirtschaften

Daraus ensteht die Notwendigkeit der Bildung von Vereinigungen und Genossenschaften, gerade in dieser Gruppe von Wirtschaften, welche einerseits die sonderbare Erscheinung der grossen

Aufwendungen pro Ha. aufweisen, aber anderseits, d. h. in der Wirklichkeit, an dem nötigsten Inventar mangeln.

c) Das Verhältnis zwischen dem landwirtschatlichen Grundkapital, d. h. dem Boden, und den anderen Kapitalgruppen wird rationeller in dem Masse wie wir zu dem Bauernwirtschaften mittleren Grösse übergehen, welche eine oekonomische Wirtschaftsgrösse mit angemessenen Aufwendungen darstellen. So finden wir bei Gruppe I (unter 3 Ha), dass das Bautenkapital dem Bodenkapital ziemlich gleich steht (das Bautenkapital beträgt 37,9%, das Bodenkapital 38,8%, vom Aktivkapital); während bei der Gruppe IV (d. h. bei den Wirtschaften, welche über 10 Ha. gross sind) beträgt das Bautenkapital 22,9%, hingegen das Bodenkapital 56,9% vom Aktivkapital.

Das Betriebskapital (Maschinen, Geräte, Arbeitsvieh, Nutzvieh, Samen, Futtermittel und das zur Bewirtschaftung bestimmte Bargeld) beziffert sich bei den Zwergwirschaften auf 16,17% vom Aktivkapital, um bei den mittelgrossen Bauernwirtschaften auf 25% zu steigen.

d) Vom Nationalwirtschaftlichen Standpunkte können die grossen Aufwendungen der Zwergwirtschaften zu optimistischen Schlussfolgerungen führen. Aber, vom Standpunkte der landwirtschatlichen Betriebslehre, sowie vom sozialen Standpunkte, ist die Zwergwirtschaft durch diese Kapitalinvestitionen stark belastet, obwohl sie genötigt ist den Konsum und die Existenz einer zahlreichen Familie zu sichern. Daher die Sorge durch alle möglichen Mittel den Ertrag dieser kleinen Wirtschaften zu steigern, sowie die Investierungen pro Ha. zu rationalisieren.

Bezüglich der Investierungen pro Ha. auf den Bauernwirtschaften der anderen Regionen des Landes, konnten wir bis Datum das verfügbare Material noch nicht gänzlich verarbeiten. Wir begnügen uns daher das betreffende Material in der anschliessenden Tabelle III für eine kürzere Zeitspanne vorzulegen.

TABELLE III.

Die Investierungen pro Ha. auf den Bauernwirtschaften der anderen Regionen Rumäniens in der Zeitspanne 1932/33—1936/37.

Die Regionen	Die Investitionen in Lei pro Ha.	Die Regionen	Die Investitionen in Lei pro Ha.
Dobrudscha	10.520	Die Donaubene . . .	27.659
Moldau	14.831	Die Ungebung von Bukarest	30.388
Bessarabien	14.971	Bukovina	39.896
Banat	26.316	Das Burzenland (Țara Bârsei)	49.093
Das Hügelland in der Gross und Kleinwa achei	26.662	Weinbauwirtschaften (Odobești)	98.669
Siebenbürgen	26 877		

Diese Tabelle bezieht sich auf Investierungsergebnisse pro Ha. nur in der Periode 1932/33-1936/37. Daraus können wir die Schlussfolgerung ziehen, dass die Donaubene als eine Region mittleren Intensität zu betrachten ist. Hinter ihr stehen 6 andere Regionen die kleinere Investitionen zu verzeichnen haben. Die Schätzungen werden bei Tagespreisen unternommen.

In der nachfolgenden Tabelle IV werden die Investierungen pro Betriebswirtschaft angegeben. Dieselbe ist als eine Ergänzung der Tabelle I zu betrachten.

TABELLE IV

Das Grundkapital, das Betriebskapital, das Activ-und PassivKapital, sowie das Reinvermögen pro Betriebswirtschaft.

Gruppe	Grund-kapital	Betriebs-kapital	Activ-kapital	Passivkapital (Schulden u. Wert des gepachteten Bodens)	Rein-vermögen
3 ha,	54.298	10.422	64.720	10.371	54.349
3— 5 „	37.711	7.505	45.216	4.512	40.704
5—10 „	36.838	9.161	45.999	4,457	41.542
10—20 „	27.489	5.692	33.181	2 255	30.925
20—50 „	25.786	8.662	35.448	2.847	31.601
Total	182.122	41.442	223.563	24.442	109.121
Durchschnitt	36.424	8 288	44.712	4.888	39.824

Das durchschnittliche Aktivkapital stellt sich, pro Betrieb, auf Lei 44.712, u. zw. in der Gruppe I auf Lei 64.720 und in der Gruppe V auf Lei 34.448. Das Passivkapital beziffert sich pro Betrieb, im Durchschnitt, auf Lei 4888, davon in der Gruppe I auf den Betrag von Lei 10.371 und nur auf Lei 2847 in der Gruppe V (bei dem mittelgrossen Bauernbesitz).

Von diesem Standpunkte ist die bäuerliche Zwergwirtschaft vollkommen benachteiligt. Wenn man die obenangeführten Tabellen überprüft, ersieht man gleich, dass der Zwergbesitz an der Spitze steht und zwar sowohl was die Investitionen als auch die Lasten anbetrifft.

Wenn man nun diese Ziffern sowohl vom buchhalterischen als auch vom oekonomischen Standpunkte streng beurteilt, dann kommt man zu dem Ergebnis, dass der Kleinbesitz für die Nationalwirtschaft tatsächliche Vorteile darstellt. Vom sozialen Standpunkte stellt aber der Kleinbetrieb ein grosses und ernstes Problem dar, wie wir es zuvor erwähnt haben. Das von dem Kleinbesitz angewendete Wirtschaftssystem wird immer mehr extensiver. Die immer ungünstigeren Aussichten entmütigt den Kleinbauer, welcher deswegen seinen Boden einseitig bewirtschaftet. Die Folge davon ist die im-

mer öfter auftretende Erscheinung der Landflucht sowie die der Bodenveräusserung. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit des Staatsinterventionismus, damit die Kolektiv-Arbeit organisiert, kontrolliert und geleitet werden soll.

Nun werden wir die Ergebnisse der Bauernwirtschaften dieser Region untersuchen.

IV. **Die Rentabilität der Bauernwirtschaften aus der Donauebene.**

In dieser Hinsicht müssen wir vorher die Begriffe der Rentabilität klar legen.

Der Rohertrag umfast die Wirtschaftseinnahmen, den Zuwachs des Vermögens während des Jahres, sowie den Verbrauch der Bauernfamilie an Wirtschaftserzeugnissen. Aus unseren Studien hat sicht herausgestellt, dass, je kleiner die Wirtschaft ist, desto weniger kommen die Geldeinnahmen bei der Zusammensetzung des Rohertrages in Betracht, dafür steigt aber die Bedeutung der von der Bauernfamilie verbrauchten Wirtschaftserzeugnisse.

Der Selbstkostenpreis umfasst die Wirtschaftsausgaben (die Abschreibungsquote inbegriffen), die Vermögensverringerung, sowie die Zinsen des aufgewendeten Kapitals (diejenigen des Bodenkapitals inbegriffen). Die Differenz zwischen Rohertrag und Selbstkostenpreis ergibt die sogenannte *Reinertragsdifferenz*. Dort, wo diese Reinertragdifferenz negativ ist, haben wir das sicherste Zeichen, dass jene Wirtschaft mit Verlusten arbeitet, weil der Rohertrag nicht im Stande ist den Selbstkostenpreis zu decken. In einem solchen Falle müsste man die Produktenpreise erhöhen, damit die Wirtschaftergebnisse zufriedenstellend sein können.

Der Reinertrag stellt die oben erwähnte Reinertragsdifferenz und die Kapitalzinsen dar. Sehr oft ist dieser Reinertrag positiv. Wenn aber die Berechnung desselben von einer negativen Reinertragsdifferenz ausgeht, dann haben wir den Beweis, dass in jenem Falle der Reinertrag unzureichend, ist um die normale Verzinsung des in der Wirtschaft aufgewendeten Kapitals zu sichern.

Das landwirschaftliche Einkommen ergibt sich, wenn man aus dem Rohertrag, sowohl die Wirtschaftsausgaben wie auch die Belohnung der Familienarbeit, abzieht. Das landwirtschaftliche Einkommen ist ein nur für die Bauernwirtschaften eigenartiger Ausdruck und Kriterium, welches den Wert der Familienarbeit in sich enthält.

Das Arbeitseinkommen kann man ausrechnen, wenn man aus dem landwirtschaftlichen Einkommen die normale Verzinsung des Aktivkapitals abzieht. Daraus ersieht man wie sich die Familienarbeit verwertet hat.

Die folgende Tabelle No. V zeigt wie sich der Selbstkostenpreis, der Rohertrag und die Reinertragsdifferenz bei den Bauernwirtschaften in der Donauebene gestalten.

TABELLE V

Die Rentabilität der Bauernwirtschaften in der Donauebene. Zeitspanne von 1929/30 bis 1938/39

Gruppe	Zahl der Wirtschaften	Die Ausgaben pro Ha.	Der Selbst kostenpreis (der Kapitalzins inbegriffen)	Der Rohertrag	Die Reinertragsdifferenz
— 3 ha.	64	5.876	9.616	10.460	844
3— 5 „	116	2.971	5.681	5.397	—284
5—10 „	285	3.601	6.868	6.131	—737
10—20 „	112	2.077	4.202	4.042	—160
20—50 „	23	1.962	3.949	3 581	—368
Total	600	16.477	30.316	29.611	—705
Durchschnitt		3.295	6.063	5.922	—141

Der Selbstkostenpreis der untersuchten Bauernwirtschaften aus der Donauebene wurde im zehnjährigen Durchschnitt auf Lei 6063 pro Ha, ausgerechnet.

In den kleinen Bauernwirtschaften stellt sich der Selbstkostenpreis auf Lei 9616 pro Ha., hingegen beträgt derselbe in den mittelgrossen Bauernwirtschaften nur Lei 3949 pro Ha. Man kann aber in den kleinen Wirtschaften den Selbstkostenpreis der einzelnen Kulturen sowie des einzelnen Produktes sehr schwer ausrechnen. Eine Bauernwirtschaft stellt eine organisch besser abgeschlossene Einheit als ein Grossgrundbesitz dar. Bei einer Bauernwirtschaft können wir nämlich nich so leicht alle Bestandteile und alle Faktoren, welche zur Herstellung eines Produktes beitragen, zerlegen. Während der Grossgrundbesitzer über speziallisiertes Personal, mit festgesetzten Befugnissen verfügt, finden wir hingegen bei dem Kleinbesitzer eine ständige Vermengung derselben.

Der Rohertrag war im Durchschnitt während dieser Zeitspanne von Lei 5922 pro Ha. Wir dürfen es aber nicht vergessen, dass hier auch der Wert der von der Bauernfamilie verbrauchten Produkte inbegriffen ist. *Trotzdem deckt der Rohertrag den Selbstkostenpreis nicht.* Die Reinertragdifferenz ist negativ; eine Ausnahme hierher wäre nur beim Zwergbesitz zu verzeichnen. Der Durchschnitt ist — 141 Lei pro Ha.

Obwohl der Bauer aus der Donauebene in den letzten 10 Jahren zufriedenstellende Ernten gehabt hat, konnte er trotzdem in seiner Wirtschaft den Selbstkostenpreis nicht decken und verzeichnete daher ständig nur Verluste. Wenn wir uns auf Handel und Industrie

beziehen würden, wo gewöhnlich eine Quote als Unternehmergewinn reserviert wird, dann würde die Lage des Landwirtes noch ungünstiger erscheinen.

Der Reinertrag (Reinertragsdifferenz + die Zinsen des eigenen Kapitals) ist positiv. Der Durchschnitt pro 10 Jahre beträgt Lei 2627 pro Ha. u. zw. beziffert sich derselbe auf Lei 4584 in den Kleinbetrieben und auf Lei 1629 in den über 20 Ha. grossen Bauernwirtschaften. Der Reinertrag ist in den Kleinbetrieben grösser, und das ist auch leicht erklärlich, da in dem gesamten Rohertrag auch der Rohertrag der Nutziere (Rinder, Schweine, Geflügel, Bienen) mitgerechnet wird, welche pro Ha. grosse Werte repräsentiert.

Um eine genaue Vorstellung der wirklichen Ergebnisse des landwirtschaftlichen Betriebes zu bekommen, haben wir das Nebeneinkommen der Bauernfamilie d. h. die Nebenverdienste derselben ausserhalb der Wirtschaft, nicht eingerechnet. In den Jahresberichten, welche wir dem Internazionalen Landw. Institute von Rom regelmässig zuschicken, enthält der Rohertrag der untersuchten Wirtschaften auch die Nebeneinkünfte der Bauernfamilie d. h. die aus menschlichen und tierischen Leistungen ausserhalb der Wirtschaft erzielten Einnahmen.

TABELLE VI

Das Landw. Einkommen, das Arbeitseinkommen und das Wolkswirtschaftliche Einkommen der Bauernwirtschaften in der Donauebene.

Gruppe	Zahl der Wirtschaften	Landw. Einkommen	Arbeits Einkommen	Volkswirt. Einkommen	Reinertrag
— 3 Ha.	64	4.947	1.835	8.082	4.584
3— 5 „	116	3.273	801	4.730	2.426
5—10 „	285	3.367	774	4.143	2.530
10—20 „	112	2.286	775	3 095	1.965
20—50 „	23	2.104	273	2.823	1.229
Zusammen fassung	600	15.977	4.458	22 873	13.134
Durchschnitt	60	3.195	891	4.574	2.627

Das Landwirtschaftliche Einkommen der Bauernwirtschaften aus der Donaubene beträgt durchschnittlich Lei 3195 pro Ha. u. zw. Lei 4947 bei den kleinen und Lei 2104 bei den über 20 Ha. grossen Wirtschaften; also ein recht bescheidenes Einkommen, welches auch die Entgeltung der in der Wirtschaft geleisteten Familienarbeit enthält. Als typisches Beispiel könnten wir eine 4 Ha, grosse Wirtschaft und eine aus 5 Personen bestehende Familie, annehmen. Laut obiger Zahlen würde diese Familie über ein jährliches Landw. Einkommen von Lei 3273 pro Ha verfügen, d. h. rund Lei 13.000 im Ganzen, beziehhungsweise Lei 2600 für jedes Familienmitglied.

Wir dürfen es nicht vergessen, dass eine 4 Ha. grosse Wirtschaft als eine schöne Wirtschaft zu betrachten ist. Nach den statistischen Daten des Ackerbauministeriums, hatte Rumänien, in ihren alten Grenzen, folgende Agrarstruktur:

unter 5 Ha. . .	2.460.000	Wirtschaften oder	75,0%	von Ganzen
5 — 10 „ . .	560.000	„ „	17,0%	„ „
10 — 100 „ . .	247.800	„ „	7,6%	„ „
über 100 „ . .	12.200	„ „	0,4%	„ „
Zuammen . . .	3.280.000	Wirtschaften	10%	

Es sind in der ersten Gruppe ungefähr 1.800.000 Bauernwirtschaften unter 3 Ha.

Die Mehrzahl unserer Bauernschaft, somit die Mehrzahl des rumänischen Volkes ist jetzt schon auf äusserst kleinen Bodenparzellen zu bewirtschaften gezwungen. Wie wir weiter oben zeigten, muss sich eine Bauernfamilie, welche über 4 Ha. Boden verfügt, mit einem jährlichen landwirtschaftlichen Einkommen von rund 13.000 Lei begnügen, d. h. sich davon ernähren und ankleiden. Die Folgen dieses Zustandes ist die Verarmung der rumänischen Bauernschaft.

Das Arbeitseinkommen — Durchschnitt der letzten 10 Jahre beträgt nur Lei 891 pro Ha. Hier ist auch die Verwertung der in der Wirtschaft geleisteten Arbeit (die Viehpflege, die Behütung desselben u. s. w.) inbegriffen.

Herr Professor M. Manoilescu zeigt in seiner Schrift *„Die Produktivität und die Rentabilität in der rumänischen Wirtschaft"*, wie hoch sich die Rentabilität und die Produktivität der Arbeit in manchen Zweigen der Industrie stellt.

Obwohl die Landwirtschaft der Hauptzweig unserer Nationaloekonomie bildet, auf welchem sich nicht nur unsere ganze wirtschaftliche Tätigkeit, sondern auch unser ganzes Dasein als Nation stützt, weist hingegen dieselbe sowohl eine geringe Produktivität, wie auch ein schwaches landwirtschaftliches Einkommen auf.

Im Lichte der oben angeführten Zahlen ist die Intensivierung und die Rentabilitätserhöhung der bauerlichen Landwirtschaft Rumäniens als ein Nationalproblem ersten Ranges zu betrachten.

Diese Intensivierung kann aber nicht einzig und allein nur durch die Ausnutzung eines einzigen Faktors, nämlich der Arbeit, erreicht werden; est gibt noch eine ganze Reihe anderer Faktoren, welche zu einem Optimalstadium gebracht werden müssen, um das sogennante Stadium der intensiven Landwirtschaft erreichen

zu können. Dazu braucht man ein günstiges Zusammenwirken verschiedener Faktoren technischer, oekonomischer, sozialer und sittlicher Natur. Ohne zu optimistisch zu sein, sowie ohne die Wirklichkeit ausser Acht zu lassen, die spröde genug ist, könnten wir jedoch sagen, dass unsere bäuerliche Landwirtschaft in sich einen gesunden Kern trägt, der ihr einen tatsächlichen Forschritt ermöglichen kann. Ihr stehen unendliche Möglichkeiten für die Zukunft bevor, weil sie zu grossen Leistungen fähig ist.

631.42 SOLS

SCHLÜSSEL ZUR BESTIMMUNG DER GENETISCHEN BODENTYPEN RUMÄNIENS

von **Ing. Dr. Const. D. Chiriță**

Es wird ein Schlüssel zur Bestimmung der genetischen Bodentypen Rumänies aufgestellt.

Die Böden werden zuerst in zwei grossen Gruppen, nach Anwesenheit oder Abwesenheit des illuvialen B Horizontes eingeteilt. Die Gruppe der Bodentypen welche einen B Herizont zeigen, teilt sich weiter in zwei Untergruppen ein, je nach dem ein grauer A_2 Podzolhorizont vorhanden ist oder nicht. In jeder Untergruppe werden die Bodentypen nach Farbe, Mächtigkeit und Grenzschärfe des A_2 oder A (Humus)-Horizontes und nach anderen Merkmalen (Bodenmächtigkeit, Humusgehalt und Humusart, Textur, Vegetation, Lage, u. a.) bestimmt.

In der zweiten Gruppe (Bodentypen ohne B Horizont) werden die Typen nach Mächtigkeit, Farbe und Struktur des A Horizontes, Aufbrausensniveau, u. a. eingeteilt.

Die Bestimmung des genetischen Typus eines Bodens ist die wichtigste Frage in der Bodenuntersuchung und in der Bodenbonitierung. Da für Ungeübte die einfache Beschreibung der Bodentypen nicht ausreicht um eine einwandfreie Bestimmung durchführen zu können, haben wir uns bemüht ihnen einen praktischen Mittel zur Verfügung zu stellen, um diese Arbeit zu erleichtern und zum gewünschten Ziele zu führen. So ist dieser „Schlüssel" erschienen, welcher in unseren praktischen Arbeiten mit den Studierenden sich bewährt hat.

Das erste Kriterium der Typenbestimmung ist das Vorhandensein oder das Fehlen des illuvialen B Horizontes. Auf diesem Grunde, teilen wir die Bodentypen in zwei grossen Gruppen ein.

Die Gruppe der Bodentypen bei welchen ein B Horizont vorhanden ist, wird in zwei Untergruppen eingeteilt, je nach dem oberhalb des B Horizontes eine helle, graue Schicht (der Podzol -oder podzolierte A_2 Horizont) vorhanden ist oder nicht.

In jeder dieser Untergruppen werden die Bodentypen nach Far-

be, Mächtigkeit, Struktur, Grenzschärfe und anderen Merkmalen der A_2 und B, oder A und B Horizonte bestimmt. Oft werden die lebendige Bodendecke, die Humusart, die Natur des Muttergesteins, wie auch die allgemeine Standsortslage als Bestimmungsmittel benutzt.

Die Gruppe der Bodentypen bei welchen ein B Horizont nicht vorhanden ist, werden nach verschiedenen Grundmerkmalen bestimmt, und zwar nach Mächtigkeit, Steingehalt, Humusart, Farbe und Struktur des Humushorizontes, Textur, u. a.

Die Steppenböden, welche eine wichtige Kategorie dieser Gruppe bilden, werden nach Tiefe des Aufbrausens mit HCl, Tiefe des Kalkhorizontes, Mächtigkeit, Farbe und Struktur des Humushorizontes bestimmt.

Wir wollen darauf aufmerksam machen, dass — besonders bei Steppenböden — unsere Bestimmungsmerkmale sich nur auf typische, zonale Böden beziehen und dass nicht selten, einige von diesen Charakteristiken, wie z. B. die Tiefe des Aufbrausens mit HCl—, mehr als in den von uns dargelegten Grenzen schwanken können. Wenn mann aber die Gesamtheit der morphologischen Merkmale in Betracht zieht, kann auch diese Schwierigkeit überwunden werden.

SCHLÜSSEL

1. **Böden mit einem illuvialen B Horizont**

Der B Horizont ist:

g u t a u s g e p r ä g t — wenn er tonnreicher und dichter als A ist, rötlich-braun, braun-rötlich oder dunkelbraun aussieht, mit rostigen, oft auch grauen Flecken und vom oberen Horizonte gut unterscheidbar ist:

w e n i g a u s g e p r ä g t — wenn er nicht bedeutend tonnreicher als A ist, braun oder braungelb aussieht, mit schwachen, rostigen Flecken und Adern, welche manchmal nur bei näherer Betrachtung der Agregatenflächen zu unterscheiden sind.

a. *Böden mit einer hellen, grauen oder weisslichen Schicht (der Podzol-oder podzolierte A_2 Horizont) oberhalb des B Horizontes.*

a_1. Der helle A_2 Horizont ist grauweisslich, dünn (2-10 cm) und scharf vom B Horizont getrennt. In hohen Berglagen . . . . . .*Primärerpodzol (Skelett oder nicht)*

a_2. Der helle A_2 Horizont ist wenig ausgeprägt, grau-gelblich oder grau-bräunlich, dünn; der Boden oberflächlich und sehr steinhaltig. In hohen Berglagen . .*Primärer, sehr steinhaltiger Skelettpodzol*

a_3. Wie bei a_1 oder a_2, aber mit einer Torfschicht bedeckt und sehr oft mit einem lebendigen Teppich von Vaccinium, Sphagnum u. a . . . . . .*Primärer Torfpodzol*

a_4. Der helle A_2 Horizont ist grau, hellgrau oder gelblich-grau, ziemlich mächtig (15—25 cm) und ist von B durch eine graue oder gelblich-graue, mit rostigen oder braunen Flecken und Adern marmorierte Übergangschicht getrennt (A./E). *Grauer Waldboden von sekundärer Podzolierung*

a_5. Der helle A_2 Horizont ist gelblich oder weisslich, von 15—25 cm Mächtigkeit und mehr, allmählicher Übergang zum B Horizont, welcher gelblich, mit einer schwach rostigen Nuance aussieht und sehr stein- und grushaltig ist . . . . .*Unreifer Waldboden von sehr schwach bemerkbarer sekundärer Podzolierung*

a_6. Der helle A_2 Horizont ist braungelblich, ziemlich mächtig (15—25 cm) und von B durch eine Übergangsschicht getrennt, welche gelblich, mit braunen oder schwach rostigen Flecken und Adern marmoriert aussieht . . . . . .*Sehr schwach podzolierte humusarme, rötliche Braunerde*

a_7. Statt einer gleichartigen grauen Schicht, zeigt der Boden eine bunte oder marmorierte Schicht, braun-rötlich mit hellgrauen Flecken und Adern, welche oberflächlich (5—15 cm) oder tiefer (15—40 cm) ausgebildet ist. Der B Horizont mächtig, braun-rostig . . . . . *Oberflächlich oder tiefpodzolierte rötliche Braunerde*

a_8. Wie bei a_5, a_6 oder a_7, aber die Farbe des B Horizontes ist braun und die darauf liegende Schicht zeigt braune und graue Flecken . . . . . *Podzolierte Braunerde (podzolierter brauner Waldboden)*

b. *Böden ohne eine helle Schicht oberhalb des B Horizontes, mit folgenden anderen Merkmalen:*

b_1. Ein brauner Humushorizont A, mit allmählichem Übergang zum B Horizont, der auch braun und humusreich ist. Sehr oft Rohhumus an der Oberfläche. Sandiger, sehr leichter Boden, auf Glimmerschiefer oder Sandsteine, in alpinen Lagen. . . . . *Alpine Braunerde*

b_2 Ein brauner Humushorizont A, von 20—40 cm Mächtigkeit, mit allmählichem Übergang zum B Horizont. Der B Horizont ist etwas tonreicher und braunschwach rostig, doch heller als A. Im Hügelland und Berglagen, auf kalkreichen Sandsteine. . . . . *Brauner Waldboden (Braunerde Ramann)*

b_3. Ein 30—40 cm mächtiger, dunkelbrauner, schwach rötlicher, krümeliger Humushorizont A. Der B Horizont, braunrötlich, tonreicher, mächtiger und dichter als A. Zwischen A und B, allmählicher Übergang. . . . . *Rötliche Braunerde*

b_4. Ein brauner, sehr schwach rötlicher Humushorizont A, krümelig, mit allmählichem Übergang zum B. Der B Horizont, braun oder braun-gelblich, mit kaum merkbaren, schwach rostigen Flecken. . *Unreife rötliche Braunerde oder Tschernosiom mit schwacher, rubifizierender Degradation*

b_5. Ein dunkelbrauner oder schwarzer, schwach grauer Humushorizont A. von 30-40 cm Mächtigkeit, krümelig. An Krümelnflächen sehr oft helles Kieselsäuremehl. Der B Horizont braun-rötlich, tonreicher und dichter als A; der Übergang A-B, allmählich. Aufbrausen mit HCl unter 30 cm und mehr, sehr oft unter 1,50 m. . *Degradierter Tschernosiom*

b_6. Ein dunkelbrauner oder schwarzer Humushorizont A. von 30—40 cm Mächtigkeit, krümelig, mit oder ohne Kieselsäuremehl auf Krümelflächen.

Der Übergang A-B allmählich. Der B Horizont braun, braun-gelblich und dichter, oft ohne merkbaren Rostflecken. . . *Schwach degradierter Tschernosiom*

b_7 Rote oder braun-rote Farbe auf dem ganzen Bodenprofil, etwas dunkler im Humushorizont A.

Auf Kalk- oder kalkreichen Gesteine *Roterde (Terra rossa)*

II. **Böden ohne einen illuvialen B Horizont**

a_1. Sehr steinhaltiger, oberflächlicher oder mächtiger Boden; ein grauer Podzolhorizont nicht vorhanden. Öfters in hohen Berglagen. . . . . *Unreifer Skelettboden*

a_2. Wie oben, aber mit einer Torfschicht bedeckt: in hohen Berglagen. *Torfskelettboden*

b. Boden mit einem braunen oder hellbraunen Humushorizont A, von 10-30 cm Mächtigkeit, und einem unteren helleren oder gelblichen Horizont, ohne merkbaren Rostflecken, sehr oft steinhaltig.

In Hügel- und Berglagen mit schwer verwitternden Gesteine . . . . . .*Unreifer Waldboden (in einem Anfangsstadium der Braun-oder Grauerdebildung).*

c. Boden mit einem schwarzen oder grau-schwarzen, sehr krümeligen oder stäubigen Humushorizont A, bis zum Muttergestein entwickelt, oft mit einem helleren Überganghorizont; das Muttergestein ist ein Kalkgestein oder ein sehr kalkreiches Gestein. Sehr oft kalkstein- und kalkgrushaltig. . . . . .*Rendsina*

d. Boden mit einem 70-80 cm mächtigen Humushorizont, grau-schwarz in feuchtem Zustand, mit eckiger Krümelstruktur am oberen Teil, dicht gelagert schon bei kleiner Tiefe. Unter A, ein hellgrauer—schwach bläulicher Horizont, mit Rostadern auf Rissen-und Wurzelnhohlräumen, sehr oft mit eisen- und manganhaltigen Konkretionen. Oft kann der Kalkhorizont C fehlen. . . . . .*Marschboden (Molkenboden)*

e. Ein schwarzer oder dunkel bis hellbrauner, sandiger Humushorizont, über einer helleren bis gelblichen, mächtigen Sandschicht. . . . . .*Schwarzer oder brauner Sandboden, unreif oder einem lokalen Bodentypus naheliegend*

f. *Steppenböden, auf Löss, Lehm, Tonn, Mergel, Sand, Alluvium u. a.*

f_1. Das Aufbrausen mit HCl fängt bei einem 30-60 m tief liegenden Niveau an. Der Kalkhorizont C erscheint bei 60-90 cm Tiefe. Der Humushorizont A dunkelbraun (schokoladebraun) oder schwarz, sehr krümelig, von 50-70 cm Mächtigkeit *Schokoladefarbiger Tschernosiom oder echte Schwarzerde*

f_2. Das Aufbrausen mit HCl fängt bei 25-30 cm Tiefe an. Der Kalkhorizont C erscheint bei 50-70 cm Tiefe. Der Humushorizont A kastanienfarbig, krümelig, von 40-60 cm Mächtigkeit. .. . .*Kastanienfarbiger Tschernosiom*

f_3. Das Aufbrausen mit HCl fängt von der Bodenoberfläche oder von 10-20 cm Tiefe an. Der Kalkhorizont C erscheint bei kleineren Tiefen: 20-30 cm, oft bei 50 cm Tiefe. Der Humushorizont A hellbraun oder braun, von 20-50 cm Mächtigkeit . .*Hellbrauner Boden von trockener Steppe*

f_4. Das Aufbrausen mit HCl fängt an der Bodenoberfläche an und gleichfalls oder bei 10-15 cm Tiefe der Kalkhorizont. Gelblicher oder hellbrauner Boden, auf Lösshängen, in der Steppe. . . . . .*Unreifer Lössboden oder Erosionsrest eines Steppenbodens*

72.03 ARCHITECTURE

VERS UNE ARCHITECTURE ROUMAINE MODERNE

par **Toma T. Socolescou**

Motto: *Nous ne devons pas toujours suivre la voie déja tracée par les autres et celui qui ne cherche pas à d vancer afin d'aboutir aussi loin que possible, ne réussit qu'à rester en arrière sans le vouloir.*
Michel Ange

La puissance créatrice de notre peuple est complètement prouvée par son bel art populaire plusieurs fois millénaire ainsi que par l'architecture plus récente de nos églises, habitations princières et voïvodales.

La création étant le but suprême d'un peuple, c'est par notre apport personnel que nous justifierons notre existence de demain.

En architecture, il ne faut pas à tout prix rechercher le nouveau et nous garder des formules sacro-saintes, comme par exemple: Il faut être de son temps. *L'architecte ne peut rester en arrière, il a au contraire pour mission d'entraîner ses contemporains dans sa marche vers le progrès.*

L'architecture ne peut être internationale, elle doit être conservatrice et suivre évolutivement la chaîne des traditions d'un peuple. La construction et la décoration, formant l'une le squelette, l'autre l'enveloppe, doivent se compléter et satisfaire aux deux exigences impérieuses: la logique et le sentiment.

Un grand penseur européen, H. Keyserling, croit que notre peuple est appelé à ressusciter l'art byzantin, qui est à la base de notre Eglise et de notre architecture et que par une reprise de nos traditions d'art, de l'esprit duquel a jailli l'art de notre passé, nous devons diriger nos pas vers une renaissance moderne de nos arts plastiques.

Les troubles de toutes sortes, par lesquels est passé notre pays ces derniers temps, les préoccupations de redressement d'ordre matériel, particulièrement absorbantes actuellement, de même que l'état de guerre qui paralyse toute activité, surtout celle artistique, nous donnent le loisir de jeter un coup d'oeil rétrospectif, pour fixer quelques principes et directives, nous guidant vers une vraie renaissance de nos arts plastiques.

Nous avons hérité d'un art populaire d'une beauté rare et variée, acquis en deux mille ans d'existence, qui forme, de même que notre langue, notre poésie, nos chansons populaires, l'art et l'architecture plus récents de nos églises et résidences princières (voïvodales), le plus précieux de notre patrimoine.

Si, à l'époque moderne, des influences étrangères et le désir d'une civilisation trop rapide, nous ont éloignés de nos bonnes traditions naturelles, dans presque toutes nos manifestations intellectuelles, je considère qu'il serait temps de revenir à la réalité et de cesser d'imiter les autres peuples. Nous devons nous convaincre que nous ne pourrons exister, que par l'apport personnel de labeur et d'originalité, par lequel nous contribuerons au nouvel ordre; si, actuellement, notre valeur est dûe à ce que nous avons été hier, nous justifierons notre existence de demain par ce que nous créons aujourd'hui.

La création étant le but suprême de tous les peuples, par le travail, la patience, la persévérance, par une évolution lente, mais d'autant plus certaine, nous pourrons atteindre le but recherché. c'est à dire une reprise, sur un plan différent et dans l'esprit moderne, de nos anciennes traditions d'art, qui ont donné de si merveilleux résultats par le passé.

Etant convaincu de la puissance créatrice artistique de notre peuple — d'ailleurs bien reconnue — je formule ci-après, quelques principes que j'estime à la base de toute architecture et en rélations étroites avec le mouvement tendant à une architecture roumaine moderne, qui fait la principale recherche de tous nos architectes conscients de la mission qui leur incombe. En architecture, lorsque nous désirons faire une innovation, il ne faut pas chercher à tout prix ce qui est moderne, ce qui importe surtout c'est la qualité; si le nouveau intervient c'est d'autant mieux, mais il faut tenir compte que la création corresponde à toutes les exigences de l'art, aux nécessités de la vie ainsi qu'aux traditions locales.

Il en va de même pour ce qui est des matériaux de construction; il n'est pas nécessaire de recourir à tout prix au nouveau. Je trouve qu'on a fait erreur d'abandonner l'architecture en fer, avant d'avoir produit tout ce qu'on aurait été en droit d'attendre de ce métal.

Dans notre pays, nous avons eu une architecture où le bois était fréquemment utilisé; aujourd'hui encore il sert dans l'architecture paysanne et dans la construction de beaucoup de villas des régions montagneuses, où il serait logique de l'employer exclusivement avec la pierre de construction. Il en est de même pour la belle combinaison, d'origine byzantine, de la pierre et de la brique apparente, remplacée par les constructions simples en brique, ou par celles en béton armé, enduites de crépi, — une nécessité de notre temps, bien entendu — mais qui ne doit pas nous entraîner au total

abandon de la pierre et de la brique, susceptibles de nous fournir, dans l'esprit moderne, une décoration de toute beauté, tout en gardant notre ligne d'art traditionnelle. L'expression: „c'est une chose qu'on a déja vue", est très relative. En architecture l'innovation n'a de valeur que si elle peut rendre le mieux au maximum, le nouveau étant chose très précaire. Une question logique se pose: une construction qui nous apparaît nouvelle aujourd'hui, le sera-t-elle encore dans dix ou vingt ans? En général, la réponse est négative; mais le chef-d'oeuvre d'art qu'est le Parthénon, lequel a culminé durant tant de siècles, ne vieillira jamais, il sera éternellement beau! C'est la haute qualité et la supériorité de l'art vrai, d'affronter les siècles.

On peut en déduire qu'il ne faut pas abandonner une oeuvre dont le développement total n'a pas été atteint, car changement n'est pas nécessairement synonyme d'évolution. Le progrès ne va pas obligatoirement de pair avec le développement de l'architecture; un bon exemple à l'appui nous est fourni par la Renaissance italienne, qui fut un progrès mais aussi une décadence quant à l'antiquité, dont l'architecture était issue et basée sur la sincérité de la construction, qualité qui s'impose de notre temps, mais qui n'a pas été toujours respectée au temps de la Renaissance.

L'architecture en tout cas doit être conservatrice car elle a pour charge de correspondre aux nécessités de l'homme, par exemple une salle à manger, une chambre à coucher, un salon, ont rendu et rendront éternellement les mêmes services.

Gardons-nous aussi des formules sacro-saintes, comme par exemple celle tout à fait banale: „des gôuts et des couleurs on ne discute pas", qui comporte en elle-même une erreur profonde; en matière d'art, tout peut être critiqué et c'est justement des discussions libres entre gens au gôut raffiné, qu'on arrive à consacrer une oeuvre d'art.

Voici encore une autre formule, exposée en style lapidaire par un grand peintre français, Daumier: „Il faut être de son temps". Incontestablement, l'architecture constitue la partie la plus vraie de notre histoire, mais elle n'a point pour but de l'écrire, elle ne se borne qu'à créer; l'artiste ne peut donc pas rester à la remorque de son temps, au contraire, il a pour mission de déterminer ses contemporains à le suivre dans sa marche continue.

Le grand homme que fut Viollet-le-Duc, écrivait vers 1870, que l'architecture et la construction doivent être pratiquées simultanément, la première représentant la fin et la seconde les moyens, l'architecture devenant pour ainsi dire la poésie de la construction. Pour

l'architecte, construire c'est utiliser des matériaux en se basant sur leur qualité et structure, avec l'idée préconçue, de satisfaire aux besoins par les moyens les plus simples et les plus solides; c'est aussi donner à la construction l'apparence de la durée, les proportions convenables soumises à certaines lois imposées par le bon sens, la raison et l'instinct. Les méthodes du constructeur doivent donc varier selon la nature des matériaux, des moyens dont il dispose, des exigences auxquelles il doit satisfaire en tenant compte du lieu de naissance et du degré de civilisation de celui-ci. Partant de là, il en résulte ces liens indestructibles qui unissent les arts plastiques à la terre, où naît et grandit ce besoin de traditionalisme qui doit diriger, invisiblement, nos pas; de toutes nos créations, devrait se dégager le sentiment que nous sommes dominés par cet impératif catégorique propre à notre race et prouver que nous sommes par-dessus toute chose, les artistes de notre patrie.

L'architecture étant conçue d'après chaque peuple et chaque pays, pour répondre aux besoins matériels et au sentiment artistique de chacun, n'est et ne doit pas être internationale. Elle peut devenir universelle par la puissance créatrice des artistes d'un pays, chose qu'on remarque à notre époque pour une grande partie de l'architecture française. Il en fut de même, du temps de la Renaissance italienne, comme de toutes les architectures des temps les plus reculés, notamment celles égyptienne, gréco-romaine et plus tard, celles médiévale, byzantine et gothique.

Parmi ceux qu'on a surnommés chez nous, „les européennisés", beaucoup croient à tort que parler de traditions, dénote un esprit arriéré et ont tendance à nier la tradition. Pourtant, si nous sommes arrivés aujourd'hui au point où nous en sommes, si nous revendiquons le droit d'être des modernes, de créer de belles oeuvres et de rompre avec le passé — selon une expression bien connue — n'oublions pas un seul jour, que nous représentons le résultat de bien des siècles d'efforts, de progrès lent et évolutif des générations qui nous ont précédés. Donc, il ne nous sied pas d'afficher du mépris pour ce qui nous est inconnu — inconnu pour la bonne raison que nous ne faisons aucun effort pour connaître. Ce qui nous apparaît aujourd'hui moderne, ne le sera plus dans 30 ou 40 ans, aussi n'oublions pas cette vérité de La Palisse, que sans le passé le présent n'existerait pas, la tradition formant la substance même de l'histoire. N'oublions pas qu'une oeuvre méritant d'être exécutée, se doit de le bien être, jusqu'au moindre détail, car en architecture la perfection des détails achève la beauté de l'oeuvre, un des moyens d'assurer la continuité des meilleures traditions.

Rappelons-nous encore qu'en matière d'art comme en toute chose, la génération spontanée n'existe pas. Entre le Parthénon et les temples qui l'ont précédé, il n'y a que des nuances. On ne peut rien créer du vide. La tradition étant le point d'appui, elle constitue le patrimoine et le bien précieux sans lesquels le mieux et le progrès n'existeraient pas. L'architecture est composée d'idées extériorisées par les moyens de l'exprimer et constitue le résultat d'études jointes au talent. La construction est pour ainsi dire le squelette de l'architecture, la décoration en est l'enveloppe; elles se complètent parfaitement l'une par l'autre et répondent à merveille aux deux exigences impérieuses: la logique et le sentiment.

A l'exception des pyramides égyptennes, dont la simplicité brutale s'harmonise si bien au désert, tous les arts comportent une décoration qui évolue de pair avec eux. L'architecture atteint son apogée lorsque le rôle de l'ornement, aussi riche soit-il, se limite à mettre en valeur la construction. L'ornement fait partie intrinsèque de la construction, dans toutes les belles architectures, puis s'en sépare; aux époques de décadence il parvient à la faire sombrer. Les liens qui unissaient alors le constructeur et le décorateur sont rompus et cette rupture ravit à l'oeuvre toute son unité, provoque des incompatibilités; c'est ce qui s'est produit en grande partie dans l'architecture du XIX-ème siècle.

L'architecture moderne s'est affirmée surtout après la grande guerre, elle a fait l'objet d'une réaction qui a renouvelé le principe classique de la construction apparente, belle par elle-même. Ceux qu'on a appelés les nudistes, ont trop négligé la décoration; profonde erreur, qui a fait de l'architecture moderne un art inachevé, incomplet, primitif, un corps dépourvu de sa chair et c'est pourquoi l'on peut affirmer avec raison qu'elle ne vibre pas.

L'architecture moderne appartenant à tous les pays, doit se développer, comme je l'ai démontré plus haut, en relation étroite avec la nature du sol, le climat et les traditions de chaque peuple. Elle ne peut donc être qu'exclusivement nationale, au même point que les lettres et les arts.

Si à notre époque un principe semble nouveau, mais n'est de fait qu'une réédition moderne des plus purs principes d'art, issus du clacissisme gréco-romain, ayant pénétré l'architecture universelle, celui de la sincérité de la construction apparente du nudisme, peut être appliqué à l'architecture de tout pays. Toutefois, un correctif s'impose: la belle construction moderne devrait être ornée d'une toute aussi belle décoration; c'est alors que l'architecture atteindra son apogée.

En ce qui nous concerne „un grand penseur qui a promené partout le globe une saisissante intuition philosophique et qui se plait à découvrir à la base de toute culture, l'esprit autochtone, H. Keyserling, ayant visité notre pays il y a quelques années, nous a dédié, dan son livre, *Das Spektrum Europas,* quelques pages (405—412) d'un réelle compréhension; Keyserling considére qu'à nous roumains, nous incombe une mission européenne, celle qui a pour but de faire renaître l'art byzantin. *Et naturellement, dit-il, ce peuple et ce pays sont appelés* à *un grand avenir*". [1]).

Il est évident que par le christianisme nous avons vécu notre histoire en liaision étroite avec Byzance, dont l'influence s'est vivement fait sentir dans notre architecture, qui est une des ramifications les mieux réussies de l'architecture byzantine, adaptée à notre terre, à notre gôut et enrichie par l'art populaire hérité de nos ancêtres, les Thraces.

C'est de l'esprit de cet art, et de l'art populaire liés fraternellement l'un à l'autre que devront ressusciter, chez nous, les arts plastiques, lesquels ont traversé une époque de désorientation, réelle éclipse, d'assez longue durée. Une partie considérable des créations de ce temps ne nous appartient pas. Suivons donc à nouveau la voie tracée par nos ancêtres, vers cet idéal qui doit guider les pas de notre jeune génération d'artistes, ceux qui feront renaître les arts plastiques.

Dans l'architecture roumaine moderne, le chemin indiqué assez timidement par la génération de I. Mincu et ses descendants, doit être élargi et suivi, au coeur d'une société plus autochtone, plus trempée et par là-même plus compréhensive.

„Indărăt către răzeşii lui Ştefan Vodă„ a dit Petre Carp, dans un discours demeuré célèbre dans nos annales parlementaires. Retournons donc à nos traditions d'art, vers cet esprit duquel a jailli l'art de notre passé. Tout artiste, tout intellectuel doit s'en convaincre et se le répéter à cette heure, de même que tous ceux conscients de la mission et de l'avenir de notre nation.

1) Nichifor Crainic : *Puncte Cardinale în Haos.* Page 127.

SOMMAIRE:

Pag.

GÉOMÉTRIE.

Nicolas Racliş Théorème de fermeture 5

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

N. Teodorescu Sur les géodésiques de longueur nulle de certains éléments linéaires finsleriens 9

GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE.

Scarlat Fotino Contribution à l'étude de la perspective aéronautique 17

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

I. Cârstoiu Une propriété des coniques 21

Cesar Coşniţa Sur les paraboles inscrites à un triangle 25

ANALYSE MATHÉMATIQUE.

N. Ciorănescu Quelques formules de moyenne et quelques inégalités entre les valeurs moyennes des fonctions monotones 37

NOMOGRAPHIE.

Al. Guţu Quelques nomogrammes à points alignés, pour la Technique de la combustion 41

THÉORIE DES GROUPES.

Gr. C. Moisil Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications 66

PHOTOGRAMMÉTRIE.

A. I. Corpaciu Untersuchungen über einen wichtigen Fehler der Aerotriangulation 91

MÉCANIQUE.

Alex. Stoenescu Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant 99

MÉCANIQUE DES FLUIDES.

D. Germani Essai d'une théorie élémentaire des déformations et des efforts intérieurs d'un fluide incompressible . 103

CHIMIE PHYSIQUE

E. Toporescu Sur le renversement de la force éléctromotrice du couple étain-fer dans les acides dilués . . . 114

CHIMIE ANALYTIQUE.

Cost. Belcot Sur le dosage du zinc 117

Pag.

PÉTROGRAPHIE.

Mircea D. Ilie et G. Manolescu — Calcaires organogènes dans le bassin Petroşeni (Roumanie) 121

ANATOMIE MORPHOLOGIQUE.

Octave Vlăduţiu — Recherches anatomiques sur les artères, les veines et les conduits biliaires intrahépatiques chez le chat 125

ESSAIS DES MATÉRIAUX.

C. C. Teodorescu — Die Beziechung zwischen dem Quellen und der Wasseraufnahme des Zementmörtels 131

A. Steopoe — Untersuchungen über die Eigenschaften einiger Betone für Meerwasserbauten 134

ÉLECTROTECHNIQUE.

C. Budeanu — Sur la signification et les applications des lois de Kirchoff 145

MESURES ÉLECTRIQUES.

Vlad Rădulescu — Sur l'erreur relative dans la mesure de la résistance d'un galvanometre par la méthode du shunt . . 155

INSTALLATIONS ÉLECTRIQUES.

A. Avramescu — Erwärmungsberechnung elektrischer Kontakte. . 167

TÉLÉPHONIE.

Matei Marinescu — Amplificateur pour communications téléphoniques . 175

RADIOTECHNIQUE.

T. Tănăsescu — Dynamische Kennlinien des C-Verstärkers . . . 183

BOUCHES A FEU.

I. Linteş — Le calcul des tubes avec chemises amovibles . . 190

ECONOMIE AGRICOLE.

N. Cornăţeanu — Einige anblicke der Rumänischen Landwirtschaft der Donauebene 194

SOLS.

C. Chiriţă — Schlüssel zur Bestimmung der genetischen Bodentypen Rumäniens 206

ARCHITECTURE.

Toma Socolescu — Vers une architecture roumaine moderne . . . 213

513.1 GÉOMÉTRIE.

SUR UN THÉORÈME DE M. POMPEIU

par **M. Şerban Gheorghiu**

Dans cette note, je me propose d'étendre le théorème de M. POMPEIU **) concernant la possibilité de construire un triangle ayant pour côtés les distances d'un point arbitraire aux sommets d'un triangle équilatéral.*

A cet effet, je suis conduit à établir l'existance d'une infinité de polygones convexes dont les côtés sont connus à l'avance et sont soumis à la condition que l'un d'entre eux soit plus petit que la somme de tous les autres.

Je montre ensuite, que les distances d'un point de l'éspace aux sommets d'un polygone régulier satisfont à cette dernière condition.

J'envisage de même, le problème de la détermination d'un polygone régulier et d'un point dans son plan tels, que les distances du point aux sommets du polygone régulier soient égales aux côtés d'un polygone donnné, à priori.

Pour finir, je reviens au cas du triangle équilatéral et je montre que la proposition de M. POMPEIU *est caractéristique pour ces triangles. Je démontre aussi une inégalité générale relative aux distances d'un point aux sommets d'un triangle.*

Pour que ($n \geqq 3$) longueurs arbitraires soient les côtés d'un polygone convexe, il faut et suffit que chacune d'entre elles soit inférieure à la somme des $n-1$ autres.

Nous allons montrer qu'elle est aussi suffisante.

Pour $n=3$ notre proposition n'est autre chose que le théorème élémentaire, classique, relatif à la possibilité de construire un triangle connaissant les longueurs de ses côtés.

Examinons maintenant le cas $n=4$. **)

Considérons pour cela quatre longueurs satisfaisant à la condition énoncée. Nous nous proposons de construire un quadrilatère convexe ayant les côtés égaux aux longueurs considérées.

---

*) Bull. de Math. et de Physique de l'Ecole Polytechnique, Bucarest. (Tome VI fasc 16, 17, 18, page. 6).

**) L'éxtention du théorème pour n=3, en cas n=4, a été faite par M. D. POMPEIU dans sa note : *La Géométrie et les imaginaires : démonstration de quelques théorèmes élémentaires.* (Loco. cité, Tome XI).

Il est évident — *à priori* —, que la solution de ce problème n'est pas unique. En effet, étant donné un polygone convexe on peut par une déformation continue en déduire une infinité d'autres, ayant les côtés égaux au premier. Cette déformation peut d'ailleure, être rendue intuitive, en supposant le polygone articulé aux sommets.

Choisissons arbitrairement pour les quatre longueurs considérées un ordre de succession comme côtés du quadrilatère cherché et désignons par a_1, a_2, a_3, a_4 ces longuers, ainsi rangées.

Soient l le plus grand des modules:

$$|a_1 - a_2| \quad \text{ou} \quad |a_3 - a_4|$$

et L la plus petite des sommes

$$a_1 + a_2 \quad \text{ou} \quad a_3 + a_4$$

Les longueurs a_1, a_2, a_3, a_4, étant supposées chacune inférieure à la somme des trois autres, on a:

$$l < L$$

Si L est plus grande que a_1, a_2, a_3, a_4, il est possible de choisir une longueur a plus grande que les mêmes quatre longueurs considérées et inférieure à L. La longueur a est aussi plus grande que l. Il s'ensuit qu'on peut construire (fig. 1) deux triangles $M_1M_2M_3$ et $M_1M_4M_3$, ayant la même base $M_1\ M_3 = a$ et pour côtés respectivement:

$$M_1\ M_2 = a_1 \quad \text{et} \quad M_2\ M_3 = a_2$$
$$M_1\ M_4 = a_4 \quad \text{et} \quad M_4\ M_3 = a_3$$

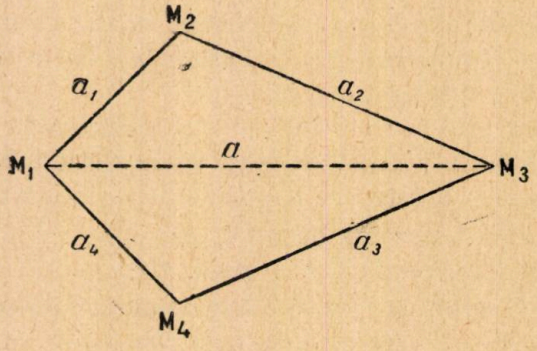


Fig. 1

Le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ répond à notre question: ses côtés sont égaux aux longueurs données à l'avance et il est convexe. En effet, par la construction même, les sommets M_2 et M_4 peuvent être

placés d'un côté et de l'autre par rapport à la base M_1M_3. D'autre part, les angles en M_1 et M_3 des deux triangles $M_1M_2M_2$ et $M_1M_4M_3$ sont tous aigus, la base M_1M_3 étant dans ces mêmes triangles le plus grand côté.

Désignons par a_4 *) la plus grande des longueurs considérées et supposons maintenant que $a_4 > L$. Dans ces conditions, on a:

$$L = a_1 + a_2$$

Dans ce cas-ci, le choix de la longueur a de tout à l'heure n'est plus possible. Nous pouvons pourtant, choisir une longueur α plus grande que a_1, a_2 et l et plus petite que L.

Sur un segment $M_1M_3 = \alpha$ pris pour base (fig. 2) nous construisons comme plus haut les triangles $M_1M_2M_3$ et $M_1M_4M_3$, ce qui est possible. Le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ ainsi obtenu répond à notre question, à condition qu'il soit convexe. Et, il l'est certainement, si α est suffisamment rapproché de $a_1 + a_2 = L$.

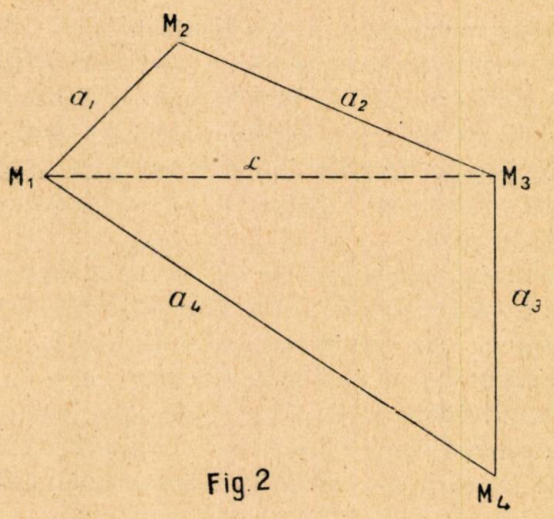


Fig. 2

Les angles en M_1 étant aigus la convexité du quadrilatère est assurée si l'on a:

$$\sphericalangle\, M_1\, M_3\, M_2 + \sphericalangle\, M_1\, M_3\, M_4 \leqq \pi$$

ou:

$$b^2 = \frac{a_2\, a_4^2 + a_1^2\, a_3}{a_2 + a_3} - a_2\, a_3 \leqq \alpha^2$$

*) Il est évident que cette notation n'est pas incompatible avec l'ordre de succession imposé aux côtés du quadrilatère cherché.

Or, on a:

$$b^2 \leqq (a_1 + a_2)^2$$

l'égalité ayant lieu pour $a_4 = a_1 + a_2 + a_3$.

Il s'ensuit que le quadrilatère obtenu est convexe si α satisfait en plus à l'inégalité:

$$b < \alpha$$

Il est à remarquer que pour α très voisin de $a_1 + a_2 = L$, les angles $M_2M_1M_4$ et $M_2M_3M_4$ se rapprochent autant qu'on le veut des angles Q et R du triangle PQR qui a pour côtés:

$$QR = a_1 + a_2, \quad RP = a_3, \quad PQ = a_4.$$

ou autrement dit le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ diffère aussi peu que l'on veut du triangle PQR.

Cette remarque nous sera utile toute de suite.

* * *

Considérons maintenant le cas général.

Nous admettons qu'étant données $n-1$ ($n \geqq 5$) longueurs l'une d'entre elles étant plus petite que la somme des $n-2$ autres, il a été prouvé qu'il existe des polygones convexes dont les côtés sont égaux aux longueurs données. Nous allons prouver que la même proposition est vraie pour n longueurs et par conséquant pour tout nombre de longueurs.

D'une manière analogue à ce que nous venons de faire, choisissons un ordre arbitraire de succession pour ces longueurs comme côtés du polygone cherché et désignons les par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Il est évident qu'on peut trouver dans cette suite deux longueurs qui se succèdent, a_i et a_{i+1}, telles que leur somme soit inférieure à la somme des $n-2$ autres. L'impossibilité de trouver un tel couple de longueurs, conduirait à avoir simultanément

$$a_1 + a_2 > a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$
$$a_2 + a_3 > a_1 + a_4 + \ldots + a_n$$
$$a_n + a_1 > a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$$

ou:

$$0 > (n-4)(a_1 + a_2 + \ldots a_n)$$

ce qui est absurde.

Soient pour fixer les idées, a_1 et a_2 deux des longueurs dont leur somme est inférieure à la somme des $n-2$ autres.

Posons: $\gamma = a_1 + a_2$.

Il existe une infinité de polygones convexes dont les côtés sont égaux à γ, α_3, α_4,...., α_n, ces côtés se succédant dans le même ordre. Soient $M_1 M_3 M_4 \ldots\ldots M_n$ les sommets d'un de ces polygones.

Laissons fixes les sommets $M_3 M_4 \ldots\ldots M_n$ et construisons (fig. 3) sur $M_3 M_n$ *un quadrilatère* $M_1 M_2 M_3 M_n$ ayant pour côtés respectivement:

$$M_1\ M_2 = a_1\ ;\ M_2\ M_3 = a_2\ ;\ M_3\ M_n = M_3\ M_n \text{ et}$$
$$M_n\ M_1 = a_n$$

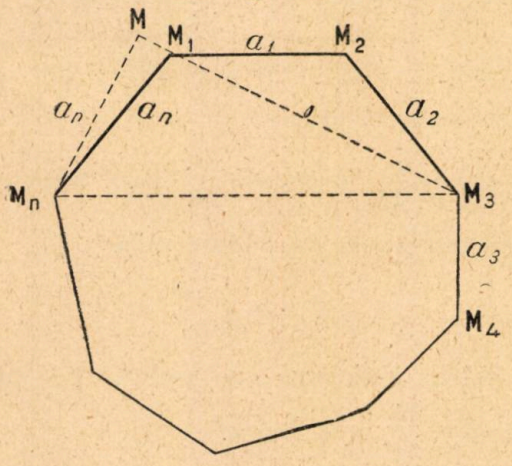


Fig. 3

La construction de ce quadrilatère est possible puisque les longueurs a_1, a_2, $M_3 M_n$ et a_n étant segments de côtés ou côtés du triangle $MM_3 M_n$ chacune de ces longueurs est plus petite que la somme des trois autres.

De même, en vertu d'une remarque faite plus haut si la longueur $M_1 M_3 = \alpha$ est suffisamment rapprochée de $\alpha_1 + \alpha_2$ est le quadrilatère $M_1 M_2 M_3 M_n$ est très voisin du triangle $MM_3 M_n$ et par conséquant le polygone $M_1 M_2 M_3 \ldots\ldots M_n$ est convexe.

q. e. d.

L'existance des polygones convexes ayant des côtés donnés peut être mise en évidence aussi, en montrant qu'il existe des polygones convexes et inscriptibles, dans un cercle, dont les côtés sont connus à l'avance *).

*) Voir F. ENRIQUES Questioni riguardanti le matematique elementari (Parte Prima l'articole G. VITALI Della continuita nella geometria elementare § 10. La démonstration que nous donnons, bien que fondée sur le principe de continuité ou — si l'on veut — sur le postulat de DEDEKIND, comme celle de M. VITALI en est pourtant différente pour montrer clairement la convexité du polygone obtenu.

Reprenons, à cet effet, les longueurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et soit α_n celle, ou une, des longueurs qui n'est inférieure à aucune des n—1, restantes. On suppose aussi:

$$a_n < a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1}$$

Considérons un cercle (C) de rayon R suffisamment grand pour avoir:

$$arcsin \frac{a_1}{2R} + arcsin \frac{a_2}{2R} + \ldots + arcsin \frac{a_n}{2R} < \pi$$

les arcs qu'y figurent étant tous plus petits que $\frac{\pi}{2}$.

La fonction continue de x:

$$f(x) = arcsin \frac{a_1 x}{2R} + arcsin \frac{a_2 x}{2R} + \ldots + arcsin \frac{a_n x}{2R}$$

est constamment croissante, dans l'intervalle

$$1 \leqq x \leqq \frac{2R}{a_n}$$

et passe d'une valeur inférieure à π, pour x=1 à une valeur supérieure à π pour $x = \frac{2R}{a_n}$, car l'on a:

$$arcsin \frac{a_1}{a_n} + arcsin \frac{a_2}{a_n} + \ldots + arcsin \frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{\pi}{2}$$

puisque sur le cercle diamètre α_n le contour polygonal convexe, ayant pour côtés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ est inscrit dans un arc, au moins, égal à ce diamètre.

Il en résulte que pour une seule valeur k, de x, on a:

$$f(k) = arcsin \frac{a_1 k}{2R} + arcsin \frac{a_2 k}{2R} + \ldots + arc\ sin \frac{a_n k}{2R} = \pi$$

k étant ainsi défini, il est évident que dans le cercle (C) on peut inscrire des polygones convexes ayant les côtés égaux à: ka_1, $ka_2, \ldots, ka_n$

De même, dans le cercle de rayon $\frac{R}{k} = R_1$ on peut inscrire des polygones dont les côtés sont égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Il est évident aussi que le rayon R_1 ne dépend pas de R parce que l'équation en x:

$$arcsin\ a_1 x + arcsin\ a_2 x + \ldots + arcsin\ a_n x = \pi$$

n'admet qu'une seule racine réelle.

D'autre part, ce même rayon R_1 ne dépend pas de l'ordre des longueurs α_1, α_2,....., α_n comme côtés du polygone. Ceci était d'ailleurs à prévoir, le rayon du cercle circonscrit étant une fonction symétrique des côtés des polygones inscrits.

De la proposition qui vient d'être établie il résulte aussi la proposition suivante:

Etant donné un contour polygonal fermé il existe une infinité de polygones convexes dont les côtés sont égaux à ceux du contour.

2. *La distance d'un point arbitraire du plan ou de l'espace, à un des sommets d'un polygone régulier est inférieure à la somme des distances du même point aux autres sommets du polygone régulier.*

Ou, autrement dit:

Etant donnés un polygone régulier et un point arbitraire, il existe des polygones convexes dont les côtés soient égaux aux distances du point aux sommets du polygone régulier.

Pour les polygones réguliers ayant quatre ou plus de quatre côtés, ces propositions sont la conséquence immédiate de cette autre proposition, qui cesse d'être vraie pour le triangle équilatéral, à savoir:

Le carré de la distance d'un point arbitraire à un des sommets d'un polygone régulier à n côtés ($n \geqq 4$) est inférieure à la somme des carrés des distances du même point aux autres sommets du polygone régulier.

Soient $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ les sommets du polygone régulier, O son centre et R le rayon du cercle circonscrit. Soit encore, M un point arbitraire du plan ou de l'espace.

Rappelons la relation bien connue:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i}^2 = n.\ \overline{MO}^2 + n.\ R^2.$$

Cette relation est vraie pour $n \geqq 3$. Elle l'est aussi pour $n=2$ à condition que O soit le milieu et R la demi-longueur du segment A_1A_2.

Soit N_1 le milieu du segment $M\ A_1$. On a:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i}^2 = n\left(2\overline{ON_1}^2 - \frac{1}{2}\overline{MA_1}^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i}^2 - \overline{MA_1}^2 = 2\,n\ \overline{ON_1}^2 + \left(\frac{n-2}{2}\right)\overline{MA_1}^2$$

Donc, pour $n \geq 4$,

$$\overline{MA_1}^2 \leq \overline{MA_2}^2 + \ldots + \overline{MA_n}^2 \qquad (1)$$

L'égalité n'a lieu que pour $n=4$ et M diamètralement opposé à A_1.

A plus forte raison on a:

$$MA_1 < MA_2 + \ldots + MA_n. \qquad (2)$$

q. e. d.

Pour $n=3$, l'inégalité (1) cesse d'être vraie à l'intérieur de la sphère (S_0) dont les points sont tels que l'on ait:

$$\overline{MA_1}^2 = \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2$$

Pourtant l'inégalité (2) reste vraie, aussi pour les points intérieurs à la sphère (S_0).

Pour le démontrer, on peut utiliser la lemme suivant:

Etant donnés une sphère de centre C et de rayon μ *et deux points* A_2 *et* A_3 *également distants du centre C, pour tout point M de la sphere on a:*

$$\left(\overline{A_2C}^2 - \mu^2\right) \cos CA_2A_3 = \left(\overline{A_3C}^2 - \mu^2\right) \cos CA_3A_2 \leq . \; MA_2 . \; MA_3 .$$

On trouve facilement que le lieu géométrique des points M pour lesquels on a:

$$\overline{MA_1}^2 - \overline{MA_2}^2 - \overline{MA_3}^2 = \lambda^2$$

est une sphère $S\lambda$ dont le centre C est le symétrique du point A_1 par rapport à A_2A_3 et le rayon μ est donné par:

$$\mu^2 = 3R^2 - \lambda^2$$

En particulier pour $\lambda = 0$ la sphère S_0 passe par A_2 et A_3.

Puisque le triangle CA_2A_3 est équilatéral et égal au triangle $A_1A_2A_3$, il résulte du lemme énoncé, que sur la sphère $S\lambda$ on a:

$$\overline{MA_1}^2 - \overline{MA_2}^2 - \overline{MA_3}^2 = \lambda^2 \leq 2\, MA_2 \cdot MA_3$$

$$\therefore \quad MA_1 \leq MA_2 + MA_3 .$$

Cette dernière inégalité étant indépendante de λ est vraie pour tous les points intérieurs à la sphère S_0.

q. e. d.

* * *

Pour que les inégalités (1) et (2) aient un sens *il suffit* que le polygone $A_1A_2....A_n$ soit régulier. Mais il n'en est nullement *nécessaire*. On peut donc espérer que ces inégalités aient lieu pour d'autres polygones, plus généraux que les polygones réguliers.

A titre d'indication et sans essayer nullement d'énoncer un résultat général nous pouvons signaler que les inégalités (1) et (2) sont vraies pour tout polygone inscriptible à $2n$ côtés, les sommets étant deux à deux diamètralement opposés, tel le rectangle.

Il nous semble aussi très probable qu'étant donné un polygone plan quelconque $A_1A_2.....A_n$ on puisse déterminer les constantes positives $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ telles, que pour tout point M du plan, on ait:

$$\gamma_1 . MA_1 \leqq \gamma_2 \ MA_2 + \gamma_3 . \ MA_3 + ... + \gamma_n . \ MA_n.$$

Cette proposition ne serrait d'ailleurs que l'extension à un polygone quelconque d'une propriété connue du triangle.

3. — Passons maintenant au problème inverse, à savoir:

Etant donné un polygone (P), détérminer un polygone régulier (P_n) *du même nombre du côtés, et un point, dans le plan, tels que les distances du point au sommets du polygone régulier soient égales aux côtés du polygone donné.* *)

Soient A, B, C trois des sommets du polygone (P) cherché, et pour fixer les idées, supposons les consécutifs. De même, M étant le point cherché, posons:

$$MA=x, \quad MB=y, \quad MC=z.$$

Les longueurs x,y,z, étant égales à trois des côtés du polygone (P) donné sont connues. Les angles du triangle ABC sont évidemment aussi connus.

Soit donc $A'B'C'$ un triangle semblable à ABC et à cela près, arbitraire. Supposons de plus, que les longueurs x,y,z, données ont été choisies de manières qu'il existe des triangles (δ) dont les côtés soient proportionels à: $a'x$, $b'y$, $c'z$, où suivant les notations habituelles a', b', c', sont les côtés du triangle $A'B'C'$. Dans ces conditions on peut détérminer deux points M' et M'' dans le plan du triangle $A'B'C'$ dont les distances au sommets A',B' et C' soient proportionnelles à x,y et z.

Les points M' et M'' ainsi obtenus sont inverses par rapport au

*) Pour le cas $n=3$, Voir: E. ABASON *Sur la réciproque d'un théorème du triangle équilatéral* (Loco cité. Tome IX pag. 32) et *„Articol despre triunghiul echilateral"*. (Gazeta Matematică. An. XLII. 1937.

cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et leur triangles podaires sont semblables aux triangles (δ). *).

Par homothétie on obtient ensuite, du triangle arbitraire $A'B'C'$ le triangle cherché ABC. Il résulte en définitif, que le côté du polygone régulier cherché est égal à l'une ou l'autre des deux longueurs ci dessous:

$$A'B' \frac{x}{M'A'}, \text{ ou } A'B' \frac{x}{M''A'}$$

Il résulte également que le problème est résolu dès que l'on se donne trois des côtés du polygone (P); les $n-3$ autres côtés du polygone sont donc déterminés par la connaissance de ces trois premiers.

* * *

Pour mieux mettre en évidence, les conditions aux quelles sont assujeties les côtés du polygone (P) donné, afin que notre problème soit possible nous allons examiner le cas particulier où le nombre des côtés du polygone donné et du polygone régulier cherché est égal à 4. Nous nous bornons à ce cas particulier uniquement pour éviter des complications d'écriture, la méthode employée ayant une portée bien plus générale.

Rappellons à cet effet, la relation qui existe entre les six distances, deux à deux, des quatre points arbitraires du plan.

Soit ABC un triangle et M un point dans son plan. Posons:

$$MA=x, \quad MB=y, \quad MC=z.$$

On a: **)

$$\Sigma a^2 (x^2-y^2)(x^2-z^2) - \Sigma a^2 (b^2+c^2-a^2) x^2 + a^2 b^2 c^2 = 0. \quad (3)$$

Considérons maintenant un carré $ABCD$, de côté u. Désignons par x,y,z,t les distances d'un point M du plan, respectivement au sommets A,B,C,D du carré. ***)

La relation (3) pour le point M et les $C_4^3=4$ triangles formés avec les sommets du carré, pris trois à trois, donne:

$$\begin{aligned}
&2u^4 - 2(x^2+z^2)u^2 + x^4 + 2y^4 + z^4 - 2y^2(x^2+z^2) = 0,\\
&2u^4 - 2(y^2+t^2)u^2 + y^4 + 2z^4 + t^4 - 2z^2(y^2+t^2) = 0,\\
&2u^4 - 2(z^2+x^2)u^2 + z^4 + 2t^4 + x^4 - 2t^2(z^2+x^2) = 0,\\
&2u^4 - 2(t^2+y^2)u^2 + t^4 + 2x^4 + y^4 - 2x^2(t^2+y^2) = 0
\end{aligned} \quad (4)$$

*) Pour la démonstration on peut consulter F. G. M. Exercices de géométrie 2487.
**) Voir J. HADAMARD. *Lecons de géométrie élémentaire* tome II pag. 332.
***) D. POMPEIU. loc. cit Tome XI.

La condition nécéssaire et suffisante pour que ces quatre relations soient compatibles, est:

$$x^2 + z^2 = y^2 + t^2 \text{ *)} \qquad (5)$$

Cette relation étant remplie, les quatre équations en u se réduisent à une seule: cette même relation permet, étant données trois des longueurs x,y,z,t d'en détérminer la quatrième.

L'équation unique à la quelle se réduisent les quatre équations en u, et que l'on peut considérer comme étant identique à la première de ces équations, a des racines réelles pour:

$$-4y^4 + 4y^2(x^2 + z^2) - (x^2 - z^2)^2 \geqq 0$$

ou:

$$(x - z)^2 \leqq 2y^2 \leqq (x + z)^2. \qquad (6)$$

Ces inégalités auquels nous sommes ainsi conduits ne sont autre chose, que la condition nécéssaire et suffisante pour qu'il existe des triangles (δ) de tout à l'heure.

En définitive, pour que les côtés x,y,z,t d'un quadrilatère convexe soient égales aux distances d'un point aux sommets d'un carré il faut et il suffit que ces longueurs vérifient la relation (5) et les inégalités (6). Si ces conditions sont remplies, le côté du carré cherché peut être obtenu soit géométriquement comme il l'a été indiqué plus haut, soit par la resolution d'une équation du second degré.

Pour des polygones à n côtés on trouvera $n-3$ relations analogues à la relation (5) et des inégalités similaires aux inégalités (6).

4. — Revenons, pour terminer cette note, au triangle équilatéral.

x,y,z étant les distances d'un point, du plan, aux sommets d'un triangle équilatéral de côté v, on déduit de (3):

$$v^4 - (x^2+y^2+z^2)\,v^2 + x^4 + y^4 + z^4 - y^2z^2 - z^2x^2 - x^2y^2 = 0 \qquad (7)$$

Cette équation en v admet des racine réelles si l'on a:

$$6(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 3(x^4 + y^4 + z^4) \geqq 0$$

ou

$$-x^4 + 2(y^2 + z^2)\,x^2 - (y^2 - z^2)^2 \geqq 0.$$

*) Cette relation constitue un cas particulier de la proposition bien connue: *La somme des carrés des distances d'un point à deux des sommets opposés d'un réctangle est égale à la même somme relative au deux autres sommets opposés.*

Donc:

$$(y-z)^2 \leqq x^2 \leqq (y+z)^2,$$

ce qui démontre une fois de plus la proposition directe de *M. Pompéiu*.

Inversement si l'on se donne x, y, z le côté v du triangle équilatéral est déterminé par l'équation (7). On trouve ainsi les deux solutions indiquées par M. Abason. *).

De même, on vérifie aisément, que les deux solutions peuvent être obtenues de la manière suivante, indiquée par *A. Angelesco* *):

Sur la base YZ du triangle XYZ ayant pour côtés réspectivement:

$$YZ=x, \quad ZX=y, \quad XY=z$$

on construit de part et d'autre les triangles équilatéraux YZX_1, et YZX_2, $\overline{XX_1}^2$, et $\overline{XX_2}^2$ sont les racines de l'équation (7).

Il suffit pour cela de remarquer que l'on a:

$$\overline{XX_1}^2 = x^2+z^2-2xz\cos(Y-60^0) = x^2+y^2-2xy\cos(Z-60^0),$$
$$\overline{XX_2}^2 = x^2+z^2-2xz\cos(Y+60^0) = x^2+y^2-2xy\cos(Z+60^0)$$

et former ensuite, les expressions:

$$\overline{XX_1}^2 + \overline{XX_1}^2 \quad et \quad \overline{XX_1}^2 \cdot \overline{XX_2}^2$$

* * *

Nous allons montrer maintenant que la propriété mise en évidence par M. Pompéiu est caractéristique pour le triangle équilatéral.

Reprenons, pour cela, le triangle ABC supposé cette fois ci, non équilatéral et désignons à nouveau par x,y et z les distances d'un point M du plan, aux sommets de ce triangle. Les côtés du triangle podaire du point M, étant proportionnelles à: ax, by, et cz on peut écrire

$$\begin{aligned} -ax+by+cz &= \lambda_a \\ ax-by+cz &= \lambda_b \\ ax+by-cz &= \lambda_c \end{aligned}$$

les λ_a, λ_b, λ_c étant tous positifs, ou nuls — si le point M se trouve sur le cercle ABC — mais pas tous à la fois. En exprimant les distances x,y et z à l'aide des λ, on trouve:

$$x = \frac{\lambda_b+\lambda_c}{2a}, y = \frac{\lambda_c+\lambda_a}{2b}, z = \frac{\lambda_a+\lambda_b}{2c}. \qquad (8)$$

*) Voir, ce Bulletin fasc 25, 26, 27 pag. 7 et pag. 27 et suiv.

Il va sans dire, que si l'on se donne arbitrairement trois quantités non négatives λ_a, λ_b, λ_c, les x,y,z, dont les longueurs sont définies par les égalités (8), ne sont pas néseccairement les distances d'un même point aux sommets du triangle ABC. Il faut de plus, que les λ vérifient l'équation qu'on obtient de (3) en substituant x, y et z par leurs valeurs (8).

Mais, pour tout système de valeurs non négatives des λ il existe un triangle (δ) dont les côtés ont pour mésure:

$$\lambda_b + \lambda_c\ ,\ \lambda_c + \lambda_a\ ,\ \lambda_a + \lambda_b.$$

et, par conséquant, il existe deux points dont les distances au sommets du triangle ABC sont proportionnelles à:

$$\frac{\lambda_b + \lambda_c}{2a}\ ,\ \frac{\lambda_c + \lambda_a}{2b}\ ,\ \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2c} \qquad (E)$$

Calculons maintenant $y+z-v$, en fonction des λ, ou:

$$y + z - x = \frac{a\,(b+c)\,\lambda_a + b\,(a-c)\,\lambda_b + c\,(a-b)\,\lambda_c}{2abc}$$

Supposons que a soit le plus grand des côtés du triangle ABC, ou ce qui revient au même, supposons qu'aucune des différences $a-b$ et $a-c$ ne soit négative. Alors on a:

$$y + z - x > 0.$$

Donc:

La distance de tout point du plan au sommet opposé au plus grand des côtés d'un triangle non équilatéral est inférieure à la somme des distances du même point au deux autres sommets.

Supposons maintenant qu'une au moins des différences $a-b$ ou $a-c$ soit négative. On peut alors choisir pour les λ un système de valeurs non négatives, de manière à avoir:

$$a\,(b+c)\,\lambda_a + b\,(a-c)\,\lambda_b + c\,(a-b)\,\lambda_c < 0$$

Les λ étant ainsi choisis, en désignant par M' et M'' les points dont les distances au sommets A, B et C sont proportionnelles aux expressions (8), on a:

$$M'A > M'B + M'C,$$
$$M''A > M''B + M''C.$$

Il s'ensuit que:

Il existe dans le plan d'un triangle non équilatéral des points pour lesquels la distance à un des sommets est supérieure à la somme des distances aux deux autres sommets.

Ou autrement dit:

La condition nécéssaire et suffisante pour qu'il n'existe pas des points tels, que leur distance à un des sommets d'un triangle soit supérieure à la somme de leurs distances aux deux autres sommets est, que le triangle soit équilatéral.

C'est un résultat, qu'a été obtenu par d'autres voies par M. M. DAN BARBILIAN, *), ERNEST ABASON **) et G. CONSTANTINESCU ***).

Note. Pour tout polygone convexe dont les angles sont obtus ou droits les triangles déterminés par trois sommets consécutifs sont aussi obtus ou rectangles. Il s'ensuit que pour de tels polygones, la distance d'un points *du plan* à un des sommets est inférieure à la somme des distances du même point aux sommets précédant et suivant le sommet considéré. En particulier, ceci est vrai pour un polygone régulier à 4 ou plus, de côtes et démontre la proposition du § 2 pour les points du plan du polygone.

*) Bulletin de la Société roumaine des Sciences (Tome .... 1938)
**) Bull. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polyt. de Bucarest. Tome IX. page 27.
***) Revista de Matematici PITAGORA. (An..... No. ... 193...).

DE LA CONSTANTE ARBITRAIRE DANS LES OPÉRATIONS D'INTÉGRATION.

par **D. Pompeiu**

L'auteur a introduit, à l'occasion des fonctions indéfiniment symétriques (S) (ABEL-BOURLET) *qui généralisent* l'addition *somme*

$$x + y = z$$

les fonctions complémentaires, *ou conjuguées* (D) *qui généralisent la* différence-*soustraction*

$$x = z - y$$

Dans le présent mémoire l'auteur, par des exemples simples d'intégration, montre comment ces deux opérations (S) *et* (D) *peuvent s'introduire dans la* structure *de la solution générale en ce qui concerne la* constante arbitraire.

Quelques explications sont nécessaires avant d'aborder l'objet de cette Note.

Dans une communication faite au deuxième Congrès interbalkanique des mathématicens, en 1938 (*Actes* du Congrès, page 97) j'ai été amené à m'occuper d'une classe de fonctions introduites par ABEL et que BOURLET a appelé fonctions *indéfiniment symétriques.*

1. Une fonction $\varphi(x,y)$ de deux variables x et y est dite indéfiniment symétrique si les fonctions suivantes

$$\varphi(x,y),\ \varphi[x,\varphi(y,z)],\ \varphi\{x,\varphi[y,\varphi(z,t)]\}\ldots\ldots$$

sont toutes des fonctions symétriques par rapport à toutes les variables qu'elles contiennent.

D'après cette définition il semblerait qu'une fonction indéfiniment symétrique doive satisfaire à un nombre infini de conditions.

Il n'en est heureusement rien.

BOURLET a démontré la proposition suivante :

Pour qu'une fonction $\varphi(z,y)$ soit indéfiniment symétrique il faut et il suffit qu'elle soit symétrique ainsi que la fonction

$$\varphi[x,\varphi(y,z)]$$

2. Le type le plus simple de fonction indéfiniment symétrique est évidemment

$$\varphi(x,y)=x+y$$

et — de même qu'à *l'addition* on adjoint l'opération conjuguée: la *soustraction*: à toute fonction indéfiniment symétrique on peut adjoindre une fonction conjuguée en posant

$$\varphi(x,y)=z$$

et dégageant une des variables x ou y. Ainsi, pour fixer les idées:

$$x=\psi(z,y)$$

est la fonction analoque à la *soustraction*.

Pour mieux marquer cette analogie on peut désigner par *(S)* l'opération — *somme*

$$\varphi(x,y)$$

et par *(D)* l'opération — *différence*

$$\psi(z,y)$$

Comme exemples on peut donner d'abord:

$$\varphi(x,y)=xy$$

et

$$\psi(z,y)=\frac{z}{y}$$

D'une façon générale on peut vérifier que tout *théorème d'addition* (on de *soustraction)* conduit à des fonctions (*S*), ou fonctions *(D)*.

3. Toutes les opérations fonctionnelles de l'arithmétique classique se généralisent *(isomorphisme)* pour les fonctions

$$\varphi(x,y) \qquad \text{et} \qquad \psi(z,y)$$

et l'on peut construire des Arithmétiques nouvelles portant sur des classes particulierès de nombres (comme éléments); ces éléments remplaçant la classe habituelle de nombres entiers.

Mais ces considérations, si intéressantes qu'elles soient sont etrangères à notre sujet et nous nous contenterons de les avoir indiquées vaguement.

4. Nous pouvons maitenant aborder le sujet de cette Note.

Considérons l'équation différentielle la plus simple

$$\frac{dx}{dy}=f(x) \tag{0}$$

La solution s'écrit sous deux formes diférentes. En posant

$$y = \varphi(x)$$

on peut écrire

$$(1) \qquad \varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

ou

$$(2) \qquad \varphi(x) = \int f(x)\, dx + K$$

l'intégrale du second membre designant simplement une fonction particulière, quelconque, dont la dérivée est égale à $f(x)$ et K étant une *constante arbitraire.*

D'ailleurs, il faut le faire remarquer, dans (1) aussi: $\varphi(a)$ signifie: une valeur *arbitraire* attribuée à $\varphi(x)$ au point

$$x = a$$

Encore une remarque, importante pour ce qui va suivre: dans la forme (1), de la solution, la constante entre dans une opération de soustraction, tandis que dans (2) K est une constante *additive.*

5. Tout cela précisé, passons à une équation différentielle moins simple

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y) f(x)$$

C'est une équation linéaire, de forme particulière et les variables se séparent

$$\frac{dx}{1+y} = f(x) dx$$

L'intégration est immédiate: en posant

$$y = \varphi(x)$$

on a

$$\log \left[\frac{1+\varphi(x)}{1+\varphi(a)} \right] = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

ou

$$(3) \qquad \frac{1+\varphi(x)}{1+\varphi(a)} = e^{\int_a^x f(\xi) d\xi}$$

On peut encore appliquer la théorie générale, pour l'équation différentielle linéaire et arriver à

$$(4) \qquad y = \varphi(x) = e^{\int f(x)dx} - 1 + C e^{\int f dx}$$

où

$$e^{\int f dx} - 1$$

désigne une solution *particulière* de

$$(5) \qquad \frac{dy}{1+y} = f(x)dx$$

l'intégrale

$$\int f(x)dx$$

désignant simplement une primitive quelconque de $f(x)$.

Quant à C: c'est une constante arbitraire.

6. Mais les formes (3) et (4) de la solution générale de (5) ne sont nullement les analogues de (1) et (2), appartenant à (0).

En effet, ce qui caractérise les formes (1) et (2) c'est le fait que la différentielle dy est *invariante* pour tout changement de y en

$$y + c \qquad \text{ou} \qquad y - c$$

C étant une constante quelconque.

Dans le cas de l'équation (5) on doit donc chercher quelles sont les transformations appliquées à y pour lesquelles la différentielle

$$\frac{dy}{1+y}$$

reste *invariante*.

On trouve facilement que cela a lieu lorsque l'on change y en

$$y + C + Cy \qquad \text{ou en} \qquad \frac{y - C}{1 + C}$$

C étant une constante arbitraire.

Cela trouvé, revenant à (3) et retranchant 1, dans les deux membres on trouve

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{1 + \varphi(a)} = e^{\int_a^x f(\xi)d\xi} - 1$$

qui est bien la généralisation de la formule (1).

De même, en écrivant

$$\varphi(x)=e^{\int f dx+K}-1$$

où l'intégrale désigne simplement une primitive, quelconque, de $f(x)$ — on transforme le second membre, facilement, et l'on arrive

$$\varphi(x)=(e^{\int f dx}-1)+(e^{k}-1)+(e^{k}-1)\cdot(e^{\int f dx}-1)$$

et, en posant

$$e^{k}-1=C$$

on écrit enfin

$$\varphi(x)=(e^{\int f dx}-1)+C+C(e^{\int f dx}-1)$$

qui, cette fois, correspond bien à la forme (4).

Ainsi les deux opérations *(D)* et *(S)* s'introduisent, tout naturellement, dans l'expression de l'intégrale générale de *(5)*.

Le lecteur qui s'intéresse à ces questions de *structure* peut appliquer un traitement analogue à d'autres équations différentielles simples, comme

$$\frac{dy}{(1-y)^{2}}=f(x)dx$$

par exemple, et chercher les opérations *(D)* et *(S)* attachées à cette équation différentielle. Elles s'introduisent dans l'expression de l'intégrale générale.

7. Nous nous bornerons, pour terminer cette Note, de montrer que les opérations *(D)* et *(S)* s'introduisent même dans l'opération de l'intégration.

En effet, la méthode de Cauchy qui consiste à partir d'un système d'équations aux différences pour arriver au théorème d'existence, dans le cas général

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

s'applique aussi dans les cas particuliers. Mais, dans ces cas particuliers nous trouverons, comme avantage, de mettre en évidence des faits analytiques qui n'apparaissent pas dans le cas général.

Ainsi prenons l'équation (0).

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

et substituons, à cette équation différentielle le système d'équations aux différences:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - a)f(a)$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)f(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y - y_{n-1} = (x - x_{n-1})f(x_{n-1}$$

(comparer: PICARD, Traité d'Analyse t. I): dans les premiers membres on a une suite d'opérations *(D)*, des *différences.*

Il s'agit d'éliminer les valeurs intermédiaires $y_1, y_2, .., y_{n-1}$

Cette élimination s'obtient par une addition, opération *(S)* qui nous donne

$$y - y_0 = \Sigma (x_{k+1} - x_k)f(x_k)$$

L'étude de la somme du second membre et un passage à la limite conduit à la notion *d'intégrale définie* et l'on a ainsi

$$y - y_0 = \int_a^x f(\xi)d\xi$$

C'est notre forme (1) de la solution générale avec

$$y = \varphi(x) \qquad y_0 = \varphi(a)$$

Venons maintenant à l'équation (5)

$$\frac{dy}{1+y} = f(x)dx$$

On substitue à cette équation différentielle un système d'équations aux différences:

$$\frac{y_1 - y_0}{1 + y_0} = (x_1 - a)f(a)$$
$$\frac{y_2 - y_1}{1 + y_1} = (x_2 - x_1)f(a_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{y - y_{n-1}}{1 + y_{n-1}} = (x - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Nous voyons ici, apparaître au premier membre la suite de différences:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{1+y_k}$$

qui sont des opérations *(D)*.

Il s'agit maintenant, comme dans le cas précédent, *d'éliminer* les valeurs intermédiaires

$$y_1 , y_2 , \ldots , y_{n-1}$$

pour arriver à

$$\frac{y-y_0}{1+y_0}$$

Eh bien, l'opération qui réalise cette *élimination* est l'opération *(S)*, correspondant à *l'addition;* ensuite un *passage à la limite* nous conduit à

$$\frac{y-y_0}{1+y_0} = e^{\int_a^x f(\xi)d\xi} - 1$$

Nous n'insisterons pas sur les détails de ces opérations, car nous nous proposons de montrer, dans une prochaine Note, comment ce procédé permet, sans artifice aucun, d'intégrer l'équation *linéaire* générale

$$\frac{dy}{dx} = P(x) . y + Q(x)$$

Qu'il nous suffise de remarquer seulement ici que, du point de vue où nous nous sommes placés: l'opération de l'intégration nous apparaît comme une *opération d'élimination.*

532.5 MECANIQUE DES FLUIDES

STRÖMUNGSBILDER FÜR EINZELNE ODER MEHRERE BRUNNEN

von **D. Pavel**

In Anlehnung an bekannte Methoden der Stömungsforschung werden, auszugsweise und in nicht abgeschlossener Form, Strömungsbilder des Grundwassers bei einzelnen lotrechten Brunnen oder Brunnenreihen ermittelt und es wird die gegenseitige hydrologische Beeinflussung erläutert.

Allgemeines.

Für unsere Untersuchung setzen wir eine hydrologisch regelmässig aufgebaute grundwasserführende Schicht, insbesonders gleichförmige Grundwassergeschwindigkeit (V_0), Gefälle (i) und Entnahmemenge je 1 m Schachthöhe (q) voraus, was ja bekanntlich bei alluvialen und äolischen Schichten zutrifft. Normalerweise finden wir folgende praktische Werte: $V_0 = 0{,}00001—0{,}00006$ m/s; $i = 1/100—1/2000$; und $q = 0{,}001—0{,}01$ m²/s.

Da wir es mit einer ebenen Strömungserscheinung zu tun haben, können wir die Strömungsbilder durch konforme Abbildungen bestimmen. Das Geschwindigkeitsfeld des ungestörten Grundwassers wird in komplexer Form durch $W_u = -V_0 z$ und dasjenige des einzelnen Brunnens durch die Senke $W_s = \frac{q}{2\pi} \ln z$ gegeben.

Das Strömungsbild ermitteln wir durch Zusammensetzen der obigen:

$$W = -V_0 z + \frac{q}{2\pi} \ln z$$

Da $W = \varphi + i\psi$ und $z = x + iy = re^{id}$ sind, erhalten wir durch Trennen der reelen und imaginären Anteile für die

Stromlinien $$\psi = -V_0 y + \frac{q}{2\pi} \alpha$$

Aequipotentiallinien $$\varphi = -V_0 x + \frac{q}{2\pi} \ln r$$

Die parametrischen Werte von φ und ψ ergeben zwei Kurvenscharen die sich rechtwinklig kreuzen und die durch krummlinige Quadrate das Strömunsfeld bilden. Die komplexe Geschwindigkeit $\zeta = \frac{dW}{dz} = u - iv$ gibt uns in jedem Feldpunkt *(P)* eine Geschwindigkeit $\overline{V} = \overline{V}_0 + \overline{V}_r$ wobei $V_r = \frac{q}{2\pi r}$ mit kleiner werdenden Entfernungen *(r)* von der Brunnenachse zunimmt und V_0 Konstant bleibt.

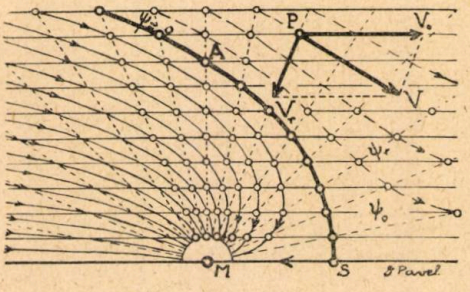


Abb. 1 Durch Netzverfahren ermittelte Brunnenströmung

In Abb 1 wird das Strömungsbild zeichnerisch nach bekanntem Netzverfahren bestimmt. Die neutrale Stromlinie $\psi = 0$ *(∞ASM)* trennt das unendlich angenommene Strömungsfeld in das innere *„Entnahmegebiet"*, in welchem die ψ-Stromlinien aus dem Unendlichen in die Senke, d. h. dem Brunnenschacht gesogen werden und in das äussere Feld welches das Entnahmegebiet umströmt. Praktisch hört die Einwirkung der Senke in einer Entfernung von rd 1500 m, vom Brrunnen seitwärts gemessen, auf. Es wird das äussere Feld bis zu dieser Grenze als *„Einwirkungsgebiet"* des Brunnens betrachtet, d.h. obwohl ausserhalb der ψ—9 keine Stromlinien zur Entnahme gelangen, ist eine Verformung des Grundwasserstromes durch den Brunnen bis zur obigen Grenze feststellbar.

Das Strömungsfeld eines einzelnen lotrechten Brunnens.

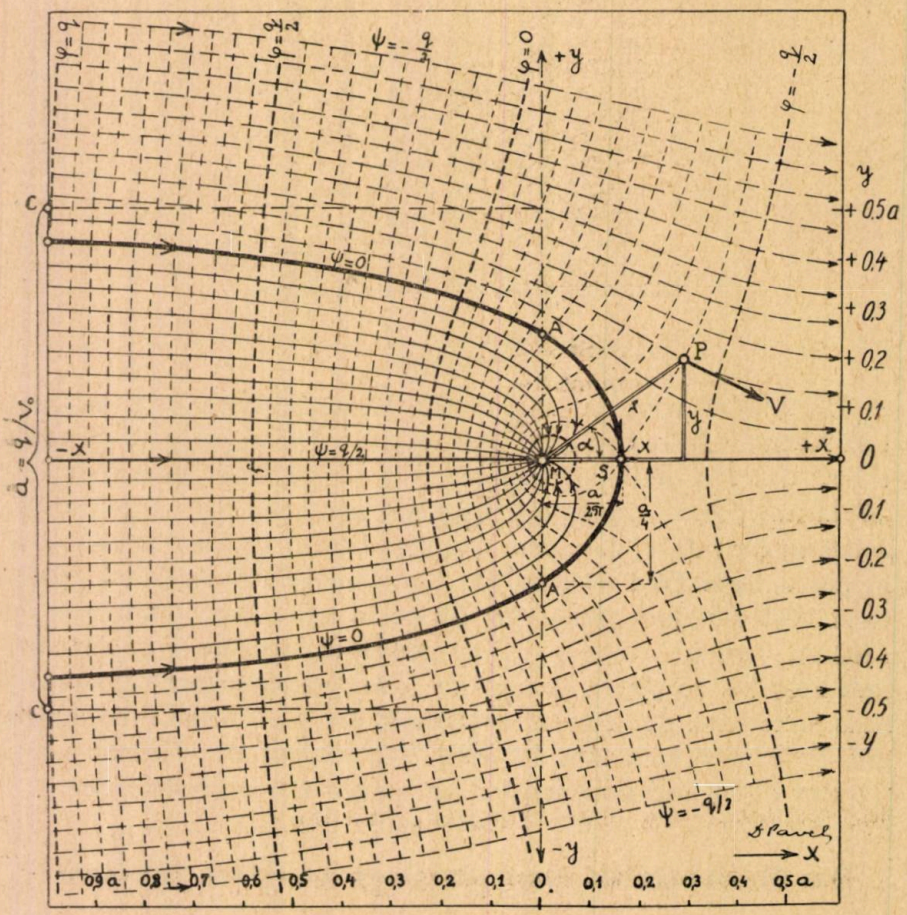
Trotzdem sich der Wasserspiegel in der Brunnennähe nach der Exponentialkurve $y^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} ln \frac{x}{r}$ senkt und wir dadurch in kleinen Entfernungen eine räumliche Strömung haben, betrachten wir weiter unten diese Aufgabe einfach als eben, da eine Abweichung nur in unmittelbarer Brunnennähe bemerkbar wird und wir

daselbst, der Dichte der Stromlinien wegen, sowieso keine zeichnerische Genauigkeit beanspruchen.

Aus der Gleichung der Stromlinien $\psi = -V_0 y + \frac{q}{2\pi}\alpha$

erhalten wir mit der Bezeichnung $a = q/V_0$ für verschiedene Feldpunkte (P) die Koordinaten (Abb. 2):

$$y = \frac{a}{2\pi}\alpha - \frac{\psi}{V_0}\,; \qquad x = y\ ctg\ \alpha$$



A b. 2. Strömungsfeld eines lotrechten Brunnens in ein unendlich ausgebreitetes homogenes Grundwasserfeld

ferner für parametrische Werte: $\psi = O\,;\ \psi = 0{,}1\frac{q}{2V_0}\,;\ldots\ldots\ \psi = \frac{a}{2}$

die inneren ψ — Linien des Entnahmegebietes und für $\psi = -0{,}1\ \frac{a}{2}\,;$

..... $\psi = -\frac{a}{2}$ u s. w. die ausserhalb der neutralen $\psi = 0$ Kurve gelegenen Stromlinien. Die Ausrechnung von x y erfolgte durch Zahlentafeln für $\alpha = 0$, 10^0, 20^0, 30^0 usw., die wir wegen Platzmangel nicht mehr aufstellen.

Die Breite des Entnahmegebietes beträgt $\alpha = q/V_0$ und hängt deshalb von dem Verhältnis der Ergiebigkeit zur Grundstromgeschwindigkeit ab. Mit den oben angegebenen Werten von q und V_0 sind die normalen Grenzen von $\alpha = 100$ bis 1000 m (*).

Je kleiner die Geschwindigkeiten V_0 und je grösser die Ergiebigkeit q sind, desto breiter werden die Entnahme- und Einwirkungsgebiete, wie auch die Scheitelung M-S. Die parabelähnliche neutrale Stromlinie $\psi = 0$ schneidet die x-Achse in der Entfernung $MS = \frac{a}{2\pi}$ die y-Achse in $MA = a/4$ und $im — \infty$ in den Punkten $C—C = a = q/V_0$. Die Aequipotentiallinien $\varphi = -V_0 x + \frac{q}{2\pi} ln\ r$ geben bei parametrisch angenommenen Werten von $\varphi = 0;\ q/2;\ q;$ $—q/2;\ —q$... und beliebigen r-Werten, die Koordinaten:

$$x = \frac{a}{2\pi} ln\ r - \frac{\varphi}{V_0}; \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

In der Abb. 2 entsteht für $\varphi = —0{,}9q/2$ eine schleifenförmige Kurve durch S und um M herum, innerhalb dieser sind sämtliche φ bis zu $— \infty$ immer kleiner werdende Ovale oder Kreise und ausserhalb nähern sich die $\varphi = q/2$ bis $+ \infty$ hin den y-Koordinaten.

In sämtlichen Punkten lassen sich die Geschwindigkeiten (V) und nach der Grundwassertheorie die Wiederstandsverluste und die Absenkung des Wasserspiegels berechnen. Die Entnahmebreite (a) kann demnach durch stärkeres Pumpen vergrössert werden, da erreichen wir aber bald eine Grenze wegen der steigenden Schleppkraft der Sandkörnchen.

---

*) Nach: THIEM, GLEITSMANN, CUCU und PRINZ (H. Hydrologie S 152) betragen:

Brunnen	$Q = qh_0 (m^3/s)$	a (m)	Einw. grenze (m)	Scheitel MS(m)
Mockau	0,045	1150	—	—
Posen	0,039	1120	—	160
Döbern	0,016	700	1300	—
Bukarest	0,039	620	—	150
Salzwedel	0,037	600	1250	—

Das Strömungsfeld einer Brunnenreihe.

Die lotrechten Brunnen seien gitterartig von $y=-\infty$ bis $+\infty$ in gewissen Abständen (a) vorgesehen und ein ∞ Potentialgrundstrom vorausgesetzt. Die komplexe Abbildungsfunktion ist nun:

$$M=-V_0 z+\frac{q}{2\pi} lnz+\frac{q}{2\pi} ln\,(z+ia)\,(z-ia)+....\frac{q}{2\pi}\,ln\,(z+ian)\,(z-ina)$$

$$W=-V_0\,z+\frac{q}{2\pi}\,ln\,[\,z\,(z^2+a^2)\,....\,(z^2+n^2\,a^2)\,...\,]$$

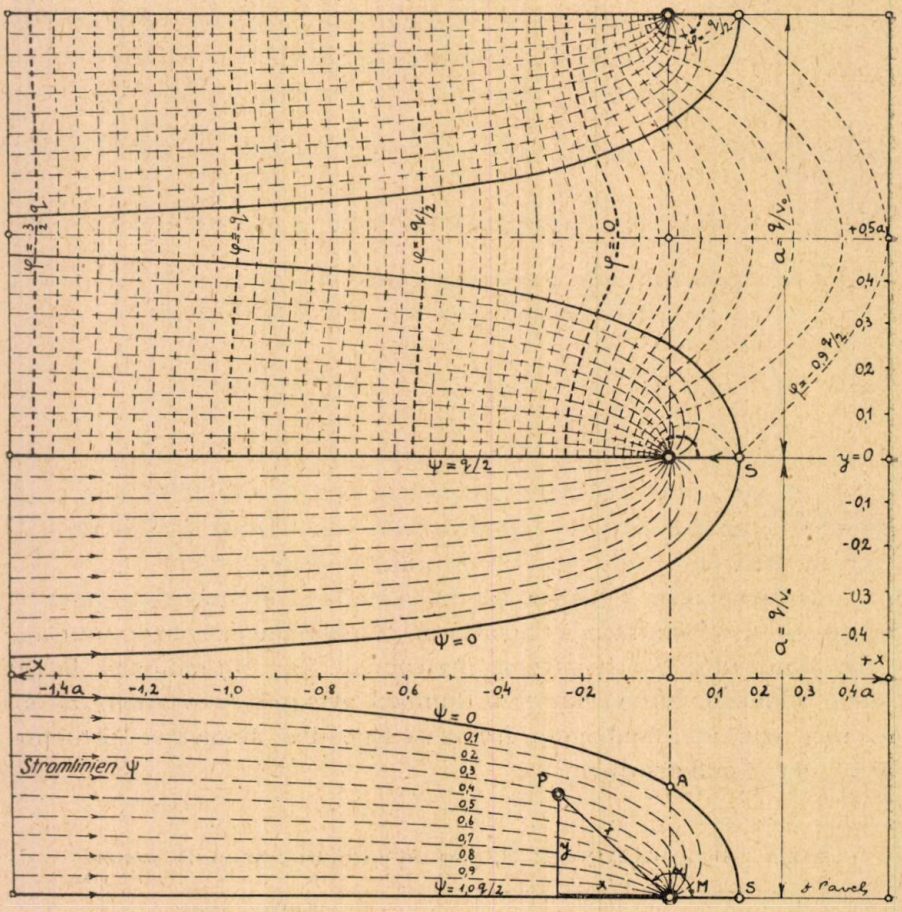


Abb. 3. Potentialströmung einer Brunnenreihe

Die Strom- und Aequipotentiallinien betragen, mit den unteren Abkürzungen:

$$\psi=-V_0\,y+\frac{q}{2\pi}\,(\alpha+\alpha'_1+\alpha''_1+....\,\alpha_n'+\alpha_n'')$$

$$\varphi = -V_0\, x + \frac{q}{2\pi} ln\,(r\, r'\, r''\, ...\, r_n'\, r_n'')$$

$$r_1' = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}\,; \qquad \alpha_1' = artg\,\frac{y+a}{x}$$

$$r'' = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}\,; \qquad \alpha''_1 = artg\,\frac{y-a}{x}$$

Nehmen wir $a = q/V_0$ und eine unendliche Anzahl Brunnen an, so wiederholt sich das Strömugsfeld periodisch, wie Abb. 3 zeigt. Dabei treffen sich je zwei benachbarte neutrale Stromlinien asymptotisch erst im $-\infty$. In dieser Weise stören sich je zwei benachbarte Brunnen hydrologisch nicht, d.h. die Ergiebigkeit eines Brunnens wird durch die Nachbarbrunnen nicht gestört.

Nimmt man willkürlich $a' < a$ an, zB in Abb. 4 soll die Ueberlagerung $a/4$ d. h. $a' = \frac{3}{4}a$ betragen, so vermindert sich die Er-

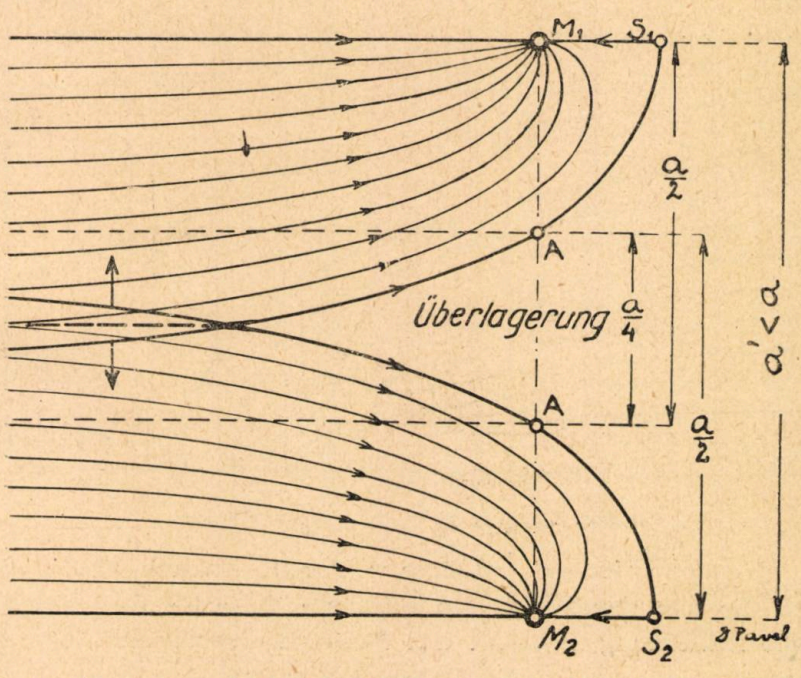


Abb. 4. Verminderung der Ergiebigkeit durch Ueberlagerung (Brunnenreihe zu dicht)

giebigkeit jedes Brunnens von q auf $q' = 0{,}75\ q$ und die Stromlinien werden in den eingezeichneten Pfeilrichtungen verdrängt.

Nimmt man umgekehrt $a'' > a$ an, z. B. in Abb. 5 $a'' = 1{,}25\ a$, so

wird zwischen den neutralen $\psi=0$ Stromlinien ein nichtgefasstes Stromfeld verloren gehen und die Ergiebigkeit der Brunnen wird nicht gesteigert.

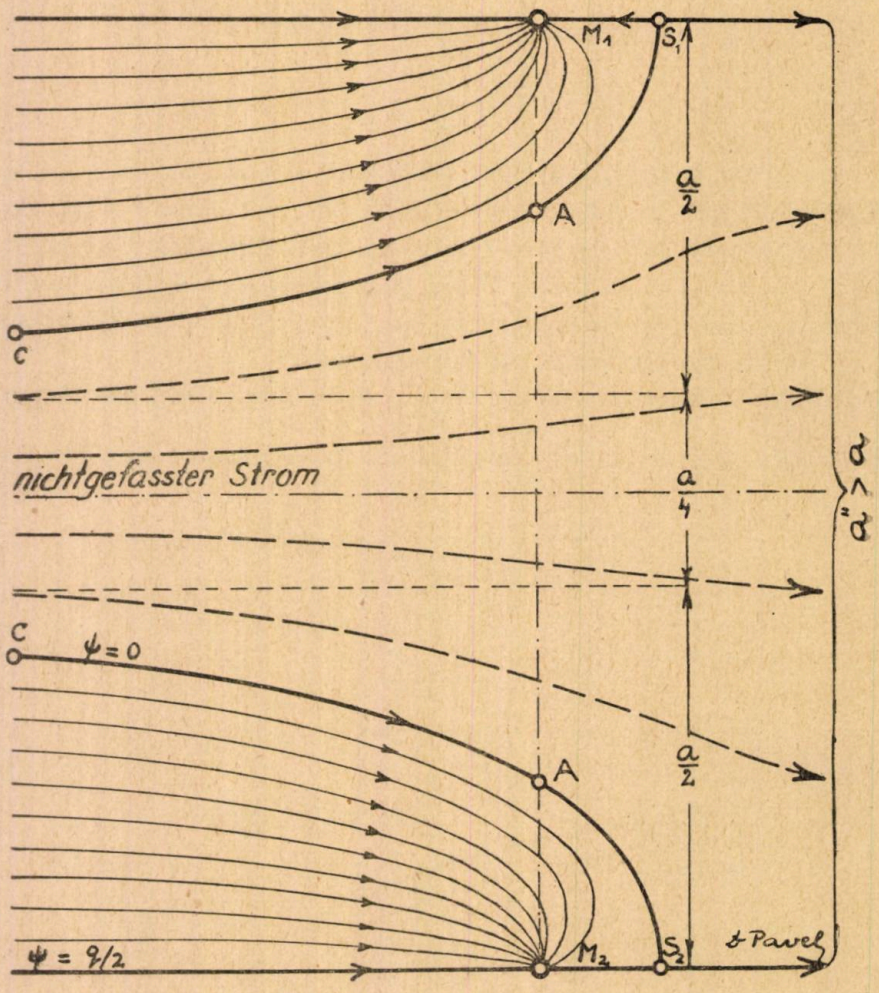


Abb. 5. Zu weit auseinander gelegene Brunnen

Zusammenfassend erklären wir auf strömungstechnischem Wege die von den Praktikern bekannte Tatsache, dass die günstigste Entfernung zwischen den Brunnen einer unendlichen Reihenfolge von Fassungsstellen $a = \frac{q}{V_0}$ sein muss. Desgleichen können wir die Scheitelungen und die Umgrenzung der Entnahmegebiete — allerdings nur für die praktisch nicht immer zutreffenden homogenen Grundwasserverhältnisse — zahlenmässig ausrechnen.

541.13 ELECTROCHIMIE

LA CONCENTRATION ANODIQUE DE L'ACIDE NITRIQUE

par **I. A. Atanasiu**

L'acide nitrique peut être concentré à l'anode par voie électrolytique avec diaphragme; les réactions secondaires de l'electrolyse n'empechent pas l'opération de concentration anodique.

Du point de vue pratique on doit partir toujours des solutions avec une concentration initielle de 50% NO_3H.

On peut atteindre par cette operation une concentration à l'anode de 99,5 NO_3H; *l'opération doit être conduite en deux phases.*

L'acide nitrique concentré, obtenu par electrolyse, est incolore et sans traces de vapeurs nitriques.

La concentration de l'acide nitrique peut être considerée comme l'opération la plus importante et la plus difficile dans l'industrie de cet acide, quelque soit la méthode de fabrication employée.

L'acide nitrique obtenu dans le procedé de l'arc électrique par fixation de l'oxygène atmosphérique atteint une concentration initiale de 33—35%. L'acide nitrique obtenu par l'oxydation de l'ammoniaque a à peu près la même concentration; enfin l'acide nitrique obtenu par le procedé classique ne dépasse pas 38°Bé.

Les solutions aqueuses d'acide peuvent être concentrées par distillation jusqu'à une concentration de 68%; d'ici et jusqu'à la concentration finale l'appareillage et les manipulations sont des plus couteuses et très difficiles. C'est donc explicable que les recherches et les essais concernant une amélioration de cette opération, soient suivies avec le plus grand intérêt.

Parmi ces recherches les éssais de concentration par voie électrolytique sont les moins nombreuses; on connait par exemple les brevets: Kl 12_1 Nr. 180052 de 28/IX/1905 et 29/XII/906 de la société „Salpetersäure-Industrie-Gesellschaft" sous le titre: Verfahren zum Konzentrieren von Salpetersäure durch Electrolyse."

La méthode exposée dans ce brevet emploie l'oxyde d'azote obtenu à la cathode et qui dirigé dans l'espace anodique est oxydé par l'oxygène qui se dégage par éléctrolyse. Le procedé n'a eu d'ailleurs aucune application pratique.

Un autre brevet anglais (Nr. 18603, 1906) décrit un procédé à peu près analogue.

Plus tard, H. I. CREIGTON [1]) dans 2 notes succesives [1]) étudie pour la première fois, experimentalement la concentration électrolitique de l'acide nitrique. Ces recherches, très intéressantes d'ailleurs, sont trop sommaires pour donner une vue ensemble complète des phénomènes qui régissent cette opération.

Le nombre des recherches relatives à la concentration électrolytique de l'acide nitrique est donc, extremêment réduit.

Nous nous proposons dans ce memoire de compléter cette lacune, en étudiant systématiquement tous les facteurs chimiques, physiques et physico-chimiques qui peuvent avoir une influence quelconque sur l'opération de concentration électrolytique de l'acide nitrique.

Phénomènes aux électrodes. Considérons soumise à l'électrolyse, une solution aqueuse d'acide nitrique, entre 2 électrodes de platine sans diaphragme; les ions d'acide nitrique disociés dans l'eau conformement au schema:

$$NO_3H \rightarrow NO_3^- + H^+$$

seront dirigés vers les deux électrodes; à la cathode il y aura une décharge d'ions H, tandis qu'a l'anode il y aura une décharge d'oxygène avec reformation d'acide nitrique, conformément au schéma:

$$2NO_3 + H_2O \rightarrow 2NO_3H + O.$$

En conclusion le résultat de l'électrolyse sera une perte progressive de H_2O, décomposée par électrolyse et en conséquence une concentration progressive de la solution en acide nitrique.

Intercalons maintenant entre les deux électrodes un diaphragme poreux et supposons que l'electrolyte est traversé par F. Faraday.

A la cathode il y aura une décharge de F ions grammes d'hydrogène se dégageant de la solution nitrique; comme le nombre de transport de l'ion NO_3 est de 0,15, cette perte sera partiellement compensée par 0,85 F grammes ions d'hydrogène obtenus par migration de l'espace anodique; en même temps 0,15 F gr. ions NO_3 passent par migration de l'espace cathodique dans l'espace anodique.

A l'anode, en même temps seront déchargés F ions grammes NO, qui par réaction avec l'eau donneront F ions grammes H, F

1) Journ. Franklin Inst. *187*, 379–399.1919; *193*, 1153–7, 1922.

atomes grammes NO_3H et un dégajement de 0,5 F gr. atome d'oxygène.

Le résultat sera une augmentation de 0,15 F gr. molécules d'acide nitrique dans le liquide anodique qui s'enrichit ainsi au detriment de la solution du compartiment cathodique.

Une partie de l'hydrogène qui se dégage à la cathode peut reduire partiellement l'acide nitrique dans le voisinage de l'électrode; cette reduction est fonction de la température, de la densité du courant, de la concentration d'acide nitrique et de la nature des éléctrodes.

Cette reduction peut passer par les phases suivantes:

$$NO_3H \rightarrow NO_2 \rightarrow NO_2H \rightarrow NO \rightarrow H_2NOH \rightarrow NH_3.$$

En conclusion le résultat de l'eléctrolyse de la solution nitrique avec diaphragme sera une diminution d'acide nitrique dans la solution cathodique par perte des ions H, migration d'anions NO_2 et par réduction partielle de l'acide nitrique en oxydes d'azote. Ces derniers peuvent être conduits directement dans l'éspace anodique, où seront oxydés dans la présence de l'eau et de l'oxygène jusqu'à NO_2H en augmentant la concentration de NO_3H dans l'espace anodique.

Quelquefois la réduction peut aller jusqu'à la formation de NH_3, qui avec NO_3H donne NO_3NH_4 qu'on retrouve dans la solution cathodique.

Des considérations théorétiques exposées plus haut, on peut facilement déduire que la meilleure méthode de concentration de l'acide nitrique par voie éléctrolytique doit toujours employer un diaphragme de séparation entre les deux électrodes, pour pouvoir obtenir facilement un acide nitrique de concentration élevée; en même temps le diaphragme a le role de limiter l'action réductrice de l'hydrogène cathodique, seulement à l'espace cathodique.

Parmis les facteurs physiques et physico-chimiques, qui peuvent avoir une influence directe sur le procès d'électrolyse, les plus importants sont les suivants:

1° La concentration initiale de l'acide nitrique soumis à l'électrolyse.

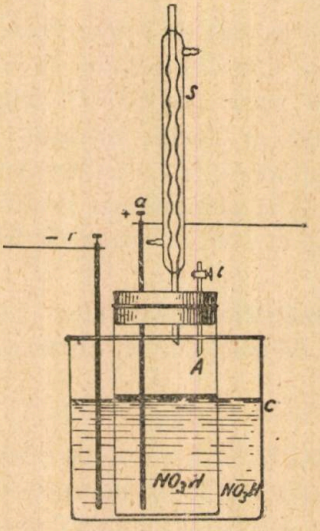
2° La densité anodique et cathodique du courant électrique.

3° La température d'électrolyse qui doit être maintenue constante entre 10°—12°C pendant tout le temps de l'opération pour empécher les pertes par évaporation et pour éviter les diminutiones

du rendement de l'électrolyse, par l'apparition des réactions secondaires au voisinage des électrodes.

4⁰ La nature des électrodes peut aussi avoir une influence essentielle dans l'opération d'électrolyse de l'acide nitrique. Dans l'opération de concentration, le choix des électrodes ne présente aucune difficulté étant strictement limité au graphite et à la platine.

Méthode de travail. L'apareil d'electrolyse est formé par le recipient *C* en verre ou en porcelaine, dans lequel on introduit un becher en porcelaine poreux *A*, qui sert en même temps comme diaphragme et compartiment anodique, tandis que le recipient *C* représent le compartiment cathodique



Le compartiment anodique est fermé a la partie supérieure par un bouchon en amiante (on peut employer aussi un bouchon en liège protegé d'une feuille d'aluminium à la partie inférieure). Ce bouchon est traversé par le réfrigérent ascendent *S* fortement refroidi par un courant d'eau, afin de faciliter la condensation des vapeurs d'élèctrolyte entrainés par le dégagement des gaz. De cette manière-ci le volume d'électrolyte reste à peu près constant pendant toute la durée de l'opération.

L'anode *a* est fixée au même bouchon, aussi qu'un petit tube en verre servant pour l'introduction et l'extraction de l'électrolyte. Le compartiment cathodique, plus grand, reste ouvert à la partie extérieure; dans cet compartiment se trouve seulement le cathode *c*.

Afin d'avoir dans le compartiment cathodique une plus grande

quantité de NO_3H, la proportion de la solution anodique et la solution cathodique a été maintenue dans la proportion de $^1/_2$.

Comme matériel d'électrode nous avons employé le platine; en dehors de ce matériel on ne peut pas employer dans les milieux d'acide nitrique concentré que les électrodes en graphite; ces électrodes comme nous l'avons déjà montré dans une note précédente, sur la nitration électrolytique des hydrocarbures aromatiques, sont facilement detruits (specialement l'anode) par l'action des vapeurs nitreux. On pourra employer, par raison d'économie, une anode en platine et une cathode en graphite. Pour conserver les conditions de travail constantes pendant toute la durée de l'opération, nous avons utilisé seulement les électrodes en platine.

La température a été maintenue entre 10^0—15^0 C; cette température peut être considérée comme la plus propice pour la concentration electrolytique de NO_3H.

Le controle de la variation de concentration pendant la marche de l'opération a été éfectué de la manière suivante: on extrait à des intervalles de temps determinés, avec une pipette spéciale, des petites quantités (1 à 2 cm.^{3}) d'électrolyte sans interrompre l'électrolyse; on introduit cette quantité d'électrolyte dans un balon de 100 cm^3 et on dilue avec de l'eau distilée; on prelève une portion de 25 cm^3 et on titre avec une solution $2N$ de $NaOH$, employant comme indicateur le methylorange.

Les résultats sont raportés à la solution initiale.

Recherches experimentales. Dans nos recherches nous avons employé un acide nitrique concentré, pur, sans couleur donc sans oxydes d'azote, dilué pour les besoins de nos recherches, à divers concentrations. Nous avons utilisé les concentrations suivantes:

NO_3H	de densité	1,09	aproximativement	17,3%
NO_3H	„ „	1,17	„	31%
NO_3H	„ „	1,30	„	62 %
NO_3H	„ „	1,42	„	71%

Au point de vue pratique, l'étude de la concentration d'acide nitrique de densité 1,09 et 1,17 ne présente qu'un interêt documentaire parceque la concentration d'acide nitrique industriel obtenu dans la fabrication directe, dépasse toujours cette concentration; au point de vue théorique, l'étude de ces solutions présente une grande importance car le phénomène de concentration éléctrolytique est plus facile à suivre et offre la possibilité d'une comparaison entre le comportement des solutions concentrées et les solutions diluées.

Le tableau 1 montre les résultats d'électrolyse obtenus en employant une solution d'acide nitrique de densité initiale 1,09 avec un courant d'une densité comprise entre 0,5—6 ampères.

TABLEAU 1.

Sol anodique : 200 cm³ — NO_3H (densité initielle = 1,09)
Sol. cathodique : 300 cm³ — θ = 15° C.

Temps	0,5 Ampères	1 Ampère	Temps	2 Ampères	3 Ampères	6 Ampères
0 h.	17,32 %	17,32 %	0 h.	16,32 %	16,32 %	16,32 %
2 „	17,68 „	18,00 „	1 „	16,66 „	17,00 „	17,70 „
4 „	—	—	2 „	17,00 „	17,70 „	18,00 „
6 „	18,00 %	19,40 %	3 „	17,32 „	18,40 „	19,60 „
8 „	—	19,72 „	6 „	18,50 „	20,40 „	22,10 „
10 „	18,49 %	20,74 „	8 „	19,10 „	22,10 „	24,20 „
15 „	19,40 „	21,40 „	10 „	20,40 „	24,48 „	26,95 „
18 „	19,72 „	22,44 „	13 „	22,10 „	27,54 „	—
23 „	21,08 „	23,80 „	15 „	23,34 „	30,60 „	—
26 „	21,40 „	—				
31 „	22,98 „	—				

En regardant ce tableau, on observe une augmentation progressive et à peu près constante en temps, de la concentration anodique de NO_3H; pour des petites densités de courant cette constance et plus nette que pour des grandes, parceque les réactions secondaires sont réduites au minimum et les pertes par evaporation deviennent inexistantes.

Les rendements de courant sont aussi plus grands pour les petites densités de courant; pour une quantité de courant de 16 ampères-heures nous avons obtenu dans la solution d'acide nitrique les augmentations de concentration anodique suivantes:

Pour 16 amp/heure à 0,5 ampères, l'augmentation anodique en NO_3H est 5,5%
„ 16 „ „ 1 „ „ „ „ „ „ 5,1%
„ 16 „ „ 2 „ „ „ „ „ „ 4 %
„ 16 „ „ 3 „ „ „ „ „ „ 4,1%
„ 16 „ „ 6 „ „ „ „ „ „ 3,8%

Les densités de courant élevées facilitent la formation dans le compartiment cathodique d'une quantité d'oxyde d'azote *(NO)* de couleur verte, qui doit être regardée comme le résultat d'une réaction secondaire nocive, car une quantité quelquonque d'acide nitrique est détruite. Toutefois, on doit préférer les densitées elevées de courant parcequ'elles abrègent beaucoup la durée de l'éléctrolyse.

La tension aux bornes est fonction de la densité de courant employée; elle varie de 3 Volts pour 0,5 ampères à 5,5 Volts pour 6 ampères.

Dans le compartiment cathodique on observé le phénomène contraire, c'est à dire la diminution progressive de la concentration en acide nitrique, phénomène étroitement lié à l'augmentation obtenue dans le compartiment anodique.

On peut suivre les résultats obtenus en regardant le tableau No. 2; les différences observées entre l'augmentation anodique et la diminution cathodique sont dues aux réactions secondaires et aux pertes par évaporation.

TABLEAU 2.

Sol. anodique : 200 cm³ NO_3H (densité initielle = 1,09)
Sol. cathodique : 300 cm³ θ = 15° C.

Temps	0,5 Ampères	1 Ampère	Temps	2 Ampères	3 Ampères	6 Ampères
0 h.	17,32 %	17,32 %	0 h.	16,3 %	16,3 %	16,3 %
2 „	17,00 „	17,00 „	1 „	15,3 „	15,3 „	14,6 „
6 „	16,60 „	15,6 „	2 „	14,9 „	14,2 „	14,2 „
10 „	16,30 „	15,3 „	3 „	16,6 „	13,6 „	13,5 „
14 „	15,60 „	14,9 „	6 „	13,2 „	11,2 „	11,0 „
16 „	15,30 „	13,9 „	7 „	12,9 „	—	10,2 „
19 „	14,90 „	13,2 „	8 „	12,2 „	10,2 %	9,5 „
23 „	14,30 „	12,2 „	10 „	10,5 „	8,1 „	—
26 „	13,90 „	—	13 „	—	6,4 „	—
31 „	13,50 „	—	15 „	8,9 „	4,6 „	—

Parmi les réactions cathodiques secondaires nous pouvons citer la formation déjà mentionnée de *NO* et une réduction partielle de NO_3H jusqu'à NH_3 qui donne naisance à NO_3NH_4; la quantité de NO_3NH_4 formée est fonction des conditions de travail.

Ainsi, pour les quantités d'éléctrolyte indiquées dans le tableau 2, nous avons obtenu: avec l'intensité de 0,5 amp., 1 gr. NO_3NH_4; avec l'intensité de 1 amp., 2,85 gr. NO_3NH_4; avec 2 ampères, 2,1 gr. NO_3NH_4 avec 3 ampères, 4,6 gr. NO_3NH_4 et avec 6 ampères, 1,5 gr. NO_3NH_4. Dans ce dernier cas, la quantité de *NO* formée est beaucoup plus grande que dans les cas précédents.

Le matériel d'électrolyse, c'est à dire les électrodes et le diaphragme, se comportent très bien pour cette concentration de l'acide nitrique.

En employant une solution d'acide nitrique de densité 1,17, les résultats obtenus sont encore plus intéressants; les résultats sont donnés dans le tableau 3.

TABLEAU 3.

Sol. anodique : 200 cm³ — NO_3H (densité initielle = 1,17)
Sol. cathodique : 400 cm³ — $\theta = 15^0$ C.

Temps	0,5 Ampères	1 Ampère	2 Ampères	3 Ampères
0 h.	31,0 %	31,0 %	31,0 %	31 %
2 „	31,6 „	31,6 „	—	33,0 „
3 „	31,8 „	—	32 9 %	33,6 „
4 „	32,0 „	32,3 %	—	34,8 „
5 „	—	32,7 „	—	—
6 „	—	—	33,8 %	37,7 %
7 „	32,6 %	33,2 %	—	—
8 „	—	—	35,4 %	41,9 %
10 „	33,2 %	34,5 %	38,0 „	43,1 %
13 „	34,2 „	37,8 „	—	—
17 „	35,1 „	38,9 „	—	—
32 „	37,0 „	—	—	—

Dans ce tableau on observe une augmentation progressive de la concentration de l'acide nitrique dans le compartiment anodique; cette augmentation est plus elevée que dans le cas précédent Pour une même quantité de courant employée, c'est à dire pour 16 ampères-heures nous avons obtenu les résultats suivants:

Pour 16 amp/heure à 0,5 ampère l'augmentation anodique de NO_3H est 6 %
„ 16 „ „ 1 „ „ „ „ „ „ 7 %
„ 16 „ „ 2 „ „ „ „ „ „ 5,7 %
„ 16 „ „ 3 „ „ „ „ „ „ 6,7 %

L'augmentation anodique de NO_3H est donc à peu près indépendente de l'intensité de courant employée et en même temps plus grande que celle obtenue avec la solution de densité 1,09. Ce phénomène peut s'expliquer par la grande quantité d'ions NO_3 qui se trouvent dans la solution et qui permettent une migration plus accentuée des anions NO_3 vers l'anode, sous l'action du courant.

La tension aux bornes varie de 3 Volts pour une intensité de 0,5 ampères à 4 Volts pour une intensité de 3 ampères; elle est donc plus petite que la tension necesitée dans l'electrolyse de la solution de densité 1,09 et du point de vue pratique est plus économique.

Pendant la durée de l'éléctrolyse on observe dans le compartiment cathodique un fort dégagement de NO qui en contact avec l'air s'oxyde jusqu'a NO_2.

Les résultats de l'éléctrolyse sont meilleurs encore quand on emploie comme solution initiale de concentration l'acide de densité 1,3, c'est à dire avec une concentration de 63% NO_3H. Ces résultats sont donnés dans le tableau 4.

On observe la même augmentation de concentration anodique, constante et progressive en temps, mais les rendements de courant sont plus elevés encore que dans les deux cas étudiées plus haut.

TABLEAU 4.

Sol. anodique : 200 cm³ — NO_3H (densité initielle = 1,30)
Sol. cathodique : 400 cm³ — $\theta = 15^0$ C.

Temps	0,5 Ampères	1 Ampère	Temps	2 Ampères	3 Ampères
0 heures	62,37 %	62,8 %	0 heures	62,8 %	62,8 %
2 „	—	66,8 „	2 „	—	65,6 „
3 „	—	—	3 „	65,6 %	67,0 „
4 „	64,9 %	—	4 „	67,0 „	68,2 „
6 „	66,2 „	69,6 %	8 „	70,7 „	71,9 „
8 „	—	—	9 „	71,7 „	73,4 „
9 „	—	70,3 %	10 „	72,7 „	75,1 „
10 „	—	—	12 „	73,4 „	75,9 „
14 „	—	72,8 %	16 „	75,1 „	77,9 „
21 „	71,5 %	77,8 „	18 „	75,9 „	79,9 „
23 „	72,2 „	—			
28 „	74,1 „	—			

Pour une quantité de courant de 14 ampères-heure, donc un peu plus petite que celle donnée comme exemple dans les 2 cas antérieurs, nous avons obtenu l'augmentation anodique suivante:

Pour 14 ampères-heure à 0,5 amp. l'augmentation anodique de NO_3H est 11,7%
„ 14 „ „ 1 „ „ „ „ „ „ 10 „
„ 14 „ „ 2 „ „ „ „ „ „ 8 „
„ 14 „ „ 3 „ „ „ „ „ „ 8 „

Donc, pour une même quantité de courant de 14 amp/heure, l'augmentation de la concentration anodique de NO_3H est à peu près deux fois plus grande pour la solution de concentration initiale 63%, que pour les solutions de concentration initielle 17,3% et 31%. L'explication de ce phénomène dans les solutions concentrées doit être atribuée à une plus forte migration des anions NO_3 vers l'éspace anodique.

La tension d'éléctrolyse varie de 2,5 Volts pour une intensité de 0,5 ampères à 3,5 Volts pour 3 ampères; l'enérgie éléctrique employée est donc plus petite encore que dans le cas précédent, ce qui du point de vue économique représente un grand avantage.

La prémière conclusion qui résulte des experiences exposées, c'est d'employer comme solution initiale un acide de concentration plus élevée; comme l'acide nitrique obtenue par les procedés habituels peut être concentré sans difficulté jusqu'à 60%, on peut l'employer directement comme solution initiale.

De cette manière-ci nous avons, avec une énergie éléctrique peu élevée, des rendements éléctrolytiques de concentration très élevées.

Le diaphragme en porcelaine est ataquée après 2 ou 3 électrolyses; il devient cassant et friable et doit être remplacé.

En utilisant un acide nitrique de concentration initiale plus élevée encore nous avons obtenu des résultats à peu près identiques que pour la solution de densité 1,3.

Ainsi, par exemple, en partant d'un acide nitrique de 71% c'est à dire de densité 1,42 et en employant une intensité de 6 ampères nous avons obtenu pour 200 cm^3 volumes égaux de solution anodique et cathodique, les augmentations de concentration suivantes exposées dans le tableau 5.

TABLEAU 5.

Sol. anodique : 200 cm^3 — NO_3H (densité initielle d =1,42)
Sol. cathodique : 200 cm^3 — $\theta = 10^0$ C.

Temps	Intensité	Tension	Quantité d'électricité	Energie électrique	Concentration en NO_3H.
0 h.	5 amp.	2,6 Volts	0 amp/h.	—	71,2 %
2 „	5 „	2,6 „	10 „	26 watts/h.	74,3 „
4 „	5 „	2,5 „	20 „	50 „	76,4 „
6 „	5 „	2,5 „	30 „	75 „	79,4 „
8 „	5 „	2,6 „	40 „	104 „	84,1 „
11 „	5 „	2,6 „	55 „	143 „	87,4 „
22 „	5 „	2,4 „	110 „	264 „	—
27 „	5 „	2,4 „	136 „	270 „	93,9 „

La concentration augmente jusqu'à 94% NO_3H; au commencement les rendements sont plus grands et à peu près constants avec le progrès de l'eléctrolyse tandis que vers la fin, la concentration va beaucoup plus lentement. On doit atribuer ce phénomène à l'apauvrissement progressif du compartiment cathodique en ions NO_3 et donc à l'abaissement de la migration et de la conductibilité électrolytique

Pour continuer l'électrolyse jusqu'à la concentration maxima, le meilleure moyen consiste à renouveller la solution cathodique épuisée, par une nouvelle charge de NO_3H à 71%, d'après la remarque déjà faite par H. I. Creigton. [1])

Nous avons essayé la même opération en employant comme anolite 100 cm³ acide nitrique de 92% (déjà obtenu dans l'opération précedente) et comme catholite 300 cm³ NO_3H 71%. L'éléctrolyse a duré 8 heures avec une intensité de 6 ampères et une temperature aproximative de 12°C; les oxydes d'azote obtenus comme réaction sécondaire à la cathode, ont été évacués.

Pour 48 ampères-heure employés, la concentration en acide nitrique a augmenté jusqu'à 99,5%; l'acide nitrique fraîchement obtenu est sans couleur.

La tension aux bornes de la cuve d'éléctrolyse pendant les deux dernières opèrations a varié entre 2—3 Volts; du point de vue pratique cette tension doit être considerée comme très économique.

La concentration de l'acide nitrique par voie éléctrolytique peut être considérée donc comme une opération précise et utile; l'acide nitrique obtenu atteint une concentration de 99,5% avec une consommation d'énergie éléctrique relativement réduite.

Il en résulte aussi que l'opération de concentration jusqu'à 99,5% peut être effectué de deux manières: 1° en une seule phase, ou 2° en deux phases d'opération.

La concentration décrite plus haut en deux phases, s'effectue d'une manière plus sûre et assez simple; elle demande une recharge de catholite, au moment ou la concentration anodique a atteint 91—92%=NO_3H, en supposant que la concentration initielle était de 60% NO_3H.

En même temps dans l'espace qui entoure les électrodes on laisse la solution reprendre la température normale.

Pendant l'électrolyse le diaphragme en porcelaine poreux est plus ou moins ataqué par l'acide nitrique, speciellement par l'acide de concentration élevée; au commencement l'ataque est borné seulement a un agrandissement des porres du paroi de la cellule, mais cet attaque constitue par lui même un desavantage car il facilite la diffusion de l'acide nitrique vers la solution la moins concentrée. Comme la solution la plus concentrée est la solution anodique il s'en-

1) Loc. cit.

suit que nous aurons toujours des pertes par diffusion et par conséquence un abaissement du rendement de concentration.

Dans le tableau 6 nous donnons les résultats et les vitesses de diffusion entre 2 solutions de concentrations differentes employant comme diaphragme un vase en porcelaine poreux partiellement ataqué par NO_2H.

TABLEAU 6

Vitesse de diffusion : NO_3H (d = 1,28) / $N0_3H$ (d = 1,16) θ = 18° C.			Vitesse de diffusion : NO_3H (d = 1,16) H_2O θ = 18° C.		
Temps	NO_3H (d=1,28) 50 cm³	NO_3H (d=1,16) 100 cm³	Temps	NO_3H (d=1,16) 50 cm³	H_2O dist. 100 cm³
0 h.	63,31 %	31,65 %	0 h.	31,65 %	0 %
2 „	62,68 „	32,13 „	2 „	31,50 „	0,31 „
23 „	55,44 „	35,28 „	23 „	18,90 „	6,61 „
47 „	44,73 „	40,32 „	47 „	12,60 „	8,82 „

On peut déduire donc que la diffusion en sens contraire est un facteur important dans l'abbaissement du rendement de concentration et elle doit être écartée avec soin.

Le meilleur moyen c'est d'employer un diaphragme en aluminium poreux qui est en même temps resistante et pratique.

CONCLUSIONS

1) L'acide nitrique dilué peut être concentré à l'anode par voie electrolytique avec diaphragme. Les reaction secondaires n'empechent pas l'operation de concentration anodique.

2) Pour la même quantité de courant utilisée, les solutions nitriques avec une concentration initiale élevée donnent des rendements d'électolyse beaucoup plus élevés que les solution diluées.

Du point de vue pratique on doit employer toujours des solutions avec une concentration initiale supérieure a 50% $N0_3H$.

3) Les petits densités de courant donnent des rendements plus élevés; on préfère une densité de courant de 6-8 amp/dm² pour une quantité de 300 cm³ solution anodique et 500 cm³ solution cathodique.

4) La tension d'électrolyse aux bornes varie avec la concentration de la solution nitrique de 4-5, 5 volts pour les solutions de densité 1,09 à 2-3 Volts pour les solutions de densité 1,3.

5) La température de l'électrolyte doit être maintenue aux environs de 12°C.

6) On peut atteindre par concentration électrolytique une concentration à l'anode de 99,5 NO_3H; l'operation doit être conduite en deux phases.

7) Le rapport entre le volume de catholite et d'anolyte doit etre au moins de 2/1.

8) L'acide nitrique concentré obtenu par électrolyse est incolore et sans traces de vapeurs nitriques.

9) Les diaphragmes en porcelaine poreux sont detruites par l'acide ; on peut rémedier à cet inconvenient en utilisant des diaphragmes en aluminium poreux.

SUR LE DOSAGE DU CUIVRE (V-ème note).

par **Constantin Belcot**

On expose d'abord l'état naturel du cuivre ; ensuite l'exploitation et les réserves de la Roumanie, puis l'étude comparative de plusieurs méthodes analytiques. Pour les laboratoires industriells, à part l'électrolyse qui est considéré la méthode la meilleure en ce qui concerne l'exactitude, la rapidité et la comodité, nous recommandons le dosage sous forme de sulfure cuivreux, la méthode iodométrique et enfin le dosage sous forme d'amine complexe Bien sûr il faut observer des conditions de travail bien déterminées.

Comme suite à nos travaux [1]) nous exposerons dans la présente note nos résultats en ce qui concerne le dosage du cuivre.

Il est bien connu de tous les chimistes que l'analyse d'une même substance faite dans différents laboratoires ne donne pas toujours des résultats concordants. Il est pourtant clair, qu'aussi bien au point de vue scientifique qu'au point de vue pratique, il serait souhaitable que la composition d'une substance puisse être facilement et exactement déterminée.

Les mauvais résultats fréquemment obtenus peuvent avoir plusieurs causes:

1). Inaptitude de l'expérimentateur;

2). Emploi d'une méthode inexacte;

3). Usage d'une méthode correcte, mais appliquée d'une manière défectueuse.

Bien sûr il faut supposer que nous nous sommes mis à l'abri des erreurs d'échantillonnage.

Une méthode dont le principe est faux est à éliminer purement et simplement Mais il arrive souvent qu'une méthode est

1) C. BELCOT: I.— Sur l'analyse de l'eau. Bull. Soc. Chim. France (4). *39*, 1483, 1926.
II.— Sur l'analyse de leau, id. *(4)*, *39*, 1648, 1926.
III.— Sur le dosage de la pyridine. An. chim. analyt. *20*, 173, 1933.
IV.— Sur le dosage du zinc. Bull. Polyt. Bucureşti. *12*, 117, 1941.

insuffisamment décrite. L'opérateur jouit d'une trop grande liberté, il en use à sa guise, interprète selon ses idées les indications données et obtient généralement des résultats différents des autres. Le *Chatellier* a souvent insisté sur ce point. Par conséquent chaque chimiste peut contribuer de la façon la plus utile au progrès de la chimie analytique, quand dans le cercle de ses préoccupations il apporte sa collaboration.

C'est aussi, entre autres, une des idées qu'a poursuivit la „Société des échantillons-types pour analyses" de Paris, la „British Standard", les Standards allemands.

Etat naturel. Parfois à l'état natif, pur ou mêlé d'oxyde et de sable, le cuivre se trouve dans un grand nombre d'espèces minérales sous forme de composés définis, à savoir:

1) *Les minerais sulfurés,* dont le plus important est:

a) la *chalcopyrite,* sulfure complexe de cuivre et de fer ($Cu\ Fe\ S_2$; 34,5—32% *Cu;* en état impur renferme généralement 3 à 4% *Cu;* b) ensuite la *chalcosine,* cuivre sulfuré, sulfure de cuivre, (Cu_2S; 79,9% *Cu);* c) *l'énargite* ($Cu_3As\ S_4$, ou $4\ CuS + Cu_2S + As\ S_3$; 48,4% *Cu);* on peut aussi citer d'autres variétés moins répandues; d) la *brochantite* ou sulfate basique de cuivre ($SO_4Cu.\ 3\ Cu\ (OH)_2$); e) la *chalcanthite* ($SO_4\ Cu.\ 5\ H_2O$), etc.

2) On trouve dans le commerce quantité de minerais-riches ou pauvres, qui sont des melanges complèxes de métaux sulfurés, qui, à part le cuivre contient aussi du fer, du plomb, d'argent, du zinc et aussi de petites quantités de nickel, de cobalt, de stanium, d'arsenic, d'antimoine, etc. On trouve aussi des sulfosels avec de As_2S_3 et de Sb_2S_3 sous forme d'acide sulfo, ayant un pourcentage en cuivre de 15 à 43.

Citons comme exemple le *panabase,* ou *tétraédrite* ou *cuivre antimono-arséniure* de cuivre, d'argent, de fer, de zinc et de de protosulfure, est représenté par le cuivre, l'argent, le fer, le zinc et le mercure et *m,* c'est-à-dire le métal sesquisulfuré, par l'antimoine, l'arsenic ou le bismuth. En somme c'est un *sulfo-antimono-arseniure* de cuivre, d'argent, de fer, de zinc et de mercure

3). *Les minerais oxydés,* tels que: a) la *cuprite* ou oxydule rouge de cuivre, ou *zigueline* (Cu_2O; 88,7% *Cu).* b) la *malachite* ou carbonate vert de cuivre, vert de montagne, cendre verte, hydrocarbonate de cuivre ($CO_3Cu + Cu\ H_2O_2$; 57,4% *Cu).*

En Roumanie [2]). A. — Le cuivre exploitable se trouve sous forme de cuivre natif, oxydes, sulfures, sulfures complexes et carbonates. On peut partager nos gisements en deux catégories distinctes:

a) L'exploitation a pour principal but l'extraction du cuivre;

b) L'exploitation a pour principal but l'extraction des autres métaux, la valorification du cuivre étant accessoire.

En général on peut dire sur les gisements de cuivre signalés jusqu'à present, que:

1) Ils sont peu importants en ce qui concerne l'étendue,

2) Comme position géographique ils sont isolés,

3) Ils sont peu exploités,

4) Presque toute la production actuelle de la Roumanie résulte des sousproduits de la refonte des minérais qui contiennent des métaux nobles.

5) On trouve surtout le cuivre sous forme sulfuré, avec des minerais d'or, d'argent, de plomb et de zinc, dans le Banat, les Monts Métalliques, le massif *Cuaş-Gulin-Tibles*, les Karpathes orientaux et dans la Dobroudgea:

a) Chalcopyrite, associé avec beaucoup de pyrite (0,2—4,5% *Cu)* et d'autres sulfures complexes.

Les gisements *d'Altân Tepe* (Dobroudgea)ont une réserve de 430.000 tonnes de pyrite cuprifère (1—3% Cu).

On pourrait exploiter les minerais cuprifères dans des autres régions.

b) Minerais de quartz (2,1% *Cu*) à *Balan* 1,—4,5% *Cu), Almaşul Săliştei* (Arad) (2,6% *Cu), Baia de Criş* (1,2—1,6% *Cu), Deva, Băiţa* (Bihor), *Banat, Baia de Aramă* (Mehedinţi), *Bucium* (Alba).

c) Il est récupéré des minerais complexes d'or et d'argent à *Baia Mare, Baia Spriei, Capnic* et *Jereapan.*

B. — On peut dire que la *réserve totale* des minerais de cuivre de la Roumanie est de 34.750 tonnes (cuivre métallique).

C. — *La production de cuivre.* Jusqu'à présent la Roumanie n'a produit que de très petites quantités de cuivre extrait pour la plus grande part des sulfures complexes (métaux précieux et plomb).

De ces minerais on obtient un cuivre brut (99% *Cu)* qui est ensuite purifié.

La production s'est élevée de 104 tonnes en 1928 à 644 tonnes en 1937 pour les usines de *Rimma* et *Phoenix.*

---

2). *Banca Naţională a Romîniei.* Contribuţiuni la problema materiilor prime în România III tome, page 294 ; 1940. (Biblioteca Economică, Monetară, Financiară, Seria I).

Cette production a été surtout utilisée pour la fabrication du sulfate de cuivre.

D'autre côté on obtient du „cuivre secondaire" par la réfonte des déchets du vieux cuivre et de ses alliages. C'est ainsi qu'en 1934 on a traité 1091 tonnes de déchets.

D. — *La consommation* de cuivre s'est élevée de 5321 tonnes en 1928 à 8283 tones en 1937.

Méthodes de dosage. Presque toujours on dose dans les laboratoires industriels le pourcentage en cuivre et en plomb; de même, les métaux nobles. En général il peut se présenter les cas suivants:

1) Minérais; 2) Sels; 3) Cuivre métallique; 4) Alliages.

Nous avons fait des recherches sur le cuivre pur, le sulfate de cuivre, la chalcopyrite et les alliages (bronzes).

Le cuivre se dose d'habitude:

1). gravimétriquement à l'état d'oxyde cuivrique,

2). gravimétriquement à l'état de sulfure cuivreux,

3). gravimétriquement à l'état de sulfocyanure cuivreux [3]),

4). par électrolyse,

5) volumétriquement par iodométrie,

6). volumétriquement par le cyanure de potassium,

7). volumétriquement par le sulfocyanure d'ammonium (Volhard).

Nous avons dosé le cuivre: 1) par l'électrolyse; 2) par iodométrie; 3) à l'état d'oxyde de cuivre, 4) à l'état de sulfure; 5) par la méthode Volhard; à part ces méthodes classiques nous avons essayé aussi les méthodes suivantes:

1). Méthode volumétrique de Minovici-Ionescu [4]).

Le principe de cette méthode est le suivant:

On transforme le sel de cuivre sous la forme de sulfate et on ajoute de l'ammoniaque en excès. On précipite par alcool de 95° le sulfate de cuivre tétra-amoniacal, on filtre, on lave à l'alcool, on dissout dans l'eau et on titre par de l'acide sulfurique 0,1 *n*, en présence du rouge de méthyle (0,1%), jusqu'à la disparition du trouble et le virage de verdâtre au rouge-violet. 1 cm^3 SO_4H_2 *0,1 n=0,006225* SO_4 *Cu.* H_2O.

2). La méthode de Spacu et Dick [5]), qui est une modification de la méthode de Spacu [6]).

---

3). RIVOT, C. R. *38*, 868, 1854.
4). MINOVICI et IONESCU. Bull. Soc. Chim. România, 3, 1921. MINOVICI, Analiza Cantitativă ed. II-a, 1924, pag. 173.
5). SPACU et DICK, Bull. Sc. Cluj, *4*, 23, 1928. Ztschr. Anal. Chem. *71*, 185, 1927.
6). SPACU, id. *1*, 352, 1922.

Les ions cuivre existant dans une solution aqueuse sont précipités complètement par un sulfocyanure alcalin en présence de la pyridine en excès, sous la forme de l'ammine complèxe de couleur verte / $(Cu\ Py)_2\ (S\ C\ N)_2$, qui est très peu soluble dans l'eau à la température ambiante.

On lave le précipité avec de l'alcool et de l'éther et on le sèche dans le vide ou dans une étuve à une assez basse température.

* * *

En ce qui concerne le dosage iodométrique du cuivre, nous pensons qu'il est nécessaire de rappeler ce qui suit:

Le principe de cette méthode, donné par HÄEN [7]), est basé sur la précipitation de l'iode de l'iodure de potassium par les sels cuivriques:

$$(1)\quad 2\,Cu + 4\,I' \rightleftarrows I_2\,Cu_2 + I_2' \text{ ou bien:}$$

$$(2)\quad 2\,SO_4\,Cu + 4\,I\,K \rightleftarrows 2\,SO_4\,K_2 + I_2\,Cu_2 + I_2$$

et le titrage par le thiosulfate de soude; 1 cm³. de solution *0,1 n= 0,012692 g. I* ou *0,006357 g Cu.* Mais c'est mieux d'établir le titre de la solution de thiosulfate par le titrage d'une quantité connue de cuivre.

Entre autres, c'est GOOCH et HEATH [8]), MOSER [9]), LEY [10]), et WARK [11]) qui ont étudié l'influence de l'excès de l'iodure de potassium, de la concentration des acides, du temps, du fer, de l'arsenic.

La chalcopyrite.

A. — Pour doser le cuivre dans la chalcopyrite, nous avons procédé de la manière suivante [12]):

Cinq grammes de chalcopyrite broyée très finement et tamisée sont calcinés avec précaution au rouge vif dans une capsule de porcelaine en la mélangeant jusqu'à complet grillage (pour décomposer le carbonate ferreux et surtout transformer le sulfure de cuivre en oxyde; on chasse aussi l'arsenic et on insolubilise l'étain); le produit est traité dans un ballon de 250 cm³. d'acide nitrique *D=1,42);* on fait bouillir pendant un quart d'heure; après refroidissement on étend jusqu'au trait par de l'eau, on agite et on

---

7). E. de HÄEN, Ann. Chem. Pharm , *91*, 237, 1854.
8). F. A. GOOCH et F. A. HEATH. Zts. an Chem., *55*, 119, 1907.
9). L. MOSER, Zts. analyt. hem., *43*. 597, 1904.
10). LEY, Chem. Ztg. *47*, 763, 1917.
11). I. W. WARK, Chem. Soc., 121, 1, 358, 1922.
12). D'après A. MEURICE, Cours d'analyse quantitative et V. VILLAVECCHIA. Traité de chimie analitique appliquée, 1921.

filtre; 200 cm^3. du liquide filtré (4 g. de substance) sont neutralisés par l'ammoniaque. On y ajoute ensuite 5 cm^3. d'acide nitrique concentré et on soumet à l'électrolyse.

B. — Ou bien:

On grille de la même manière 5 à 10 g. de chalcopyrite. Après refroidissement on introduit dans une fiole conique de 300 à 400 cm^3. de capacité et on ajoute un nombre de cm^3. d'acide nitrique concentré double du nombre de grammes de substance pesée (ou bien, quand on a à doser 0,3—0,5 g. de cuivre, on ajoute 20 cm^3. acide nitrique concentré à la température ordinaire; on ajoute ensuite 25 cm^3. d'acide chlorhydrique fumant et 10 cm^3. d'acide sulfurique concentré). On obstrue le goulot de la fiole à l'aide d'un petit entonnoire et on laisse bouillir lentement au bain de sable pendant 15 à 30 minutes. Après ce temps on transvase le tout dans une capsule de porcelaine, on ajoute $^1/_2$ cm^3. d'acide sulfurique concentré par gramme de chalcopyrite pesé et évaporé au bain-marie. On chauffe lentement au bain de sable jusqu'à l'apparition de vapeurs blancs d'acide sulfurique, pour décomposer complètement les nitrates. On laisse refroidir, reprend la masse par l'eau bouillante, fait chauffer quelques minutes et filtre. (On peut se dispenser, car on gagne du temps et les résultats sont aussi précis. De plus, si on ne veut pas doser le fer, on lave à l'eau et on précipite directement le cuivre).

Les liqueurs filtrées sont additionnés d'ammoniaque en excès, on sépare l'hydroxyde ferrique par filtration, on lave deux fois à l'eau bouillante, dissout le précipité dans l'acide sulfurique dilué et chaud et on précipite une seconde fois. On filtre et on concentre la solution à un volume de 300 cm^3 environ et neutralise l'ammoniaque à l'aide d'acide sulfurique à 50% et fait bouillir.

On introduit maintenant peu à peu dans la liqueur bouillante un excès notable (environ 10—12 g.) de thiosulfate de sodium [13]) pur en cristaux. La liqueur se trouble, il se dégage de l'anydride sulfureux; on retire la flamme. Le précipité, très dense, se sépare rapidement et tombe au fond du vase. Si la liqueur surnageante serait encore trouble, il faudrait recommencer l'ébulition quelques minutes.

$$S_2O_3Na_2 + SO_4Cu + H_2O \rightarrow S\,Cu + SO_4Na_2 + SO_4H_2$$

Les liqueurs chaudes sont décantées sur un filtre sans cendre; on lave le précipité quatre à cinq fois par décantation à l'eau

13). VORTMANN. *Z. f. an. Chem., 20.* 416, 1881; ORLOVSKI, id., *21*, 2 5. 1882.

bouillante; on filtre et on lave de nouveau. On lave environ deux fois à l'alcool (90°) et fait sécher à l'étuve. On brûle le filtre à part dans un creuset poreux de Rose, ajoute le précipité, recouvre le tout d'un peu de soufre pur (recristalisé dans le sulfure de carbone), calcine dans un courant d'hydrogène, soit de gaz d'éclairage. On pèse sous forme de sulfure de cuivre ($S\,Cu_2$): $2\,S\,Cu \rightarrow SC\,u_2 + S$; d'où on trouve: $S\,Cu_2$. 0,7987, le cuivre.

Il est recommandable de recalciner le précipité en présence d'un peu de soufre et de s'assurer qu'il n'a pas changé de poids.

Obs. Le précipité de sulfure cuivrique doit être recouvert d'eau de lavage pendant tout le cours des lavages, car: le sulfure cuivrique humide s'oxygène très vite à l'air; puis, par le lavage à l'hydrogène sulfuré, le sel qui s'était formé ($S_2O_3Cu.\,SO_4Cu$) se transforme en sulfure cuivrique colloïdal, qui passe à travers le filtre à l'état d'hydrosol et se coagule au contact du filtrat acide.

N. B. Bien entendu qu'on peut doser le cuivre par une autre méthode.

5). *Dosage du cuivre dans les minerais d'après* Low. *Principe.* On dissout le minerais dans l'acide, on sépare le cuivre du fer, etc., en le précipitant par une lame d'aluminium et on dissout le cuivre précipité dans l'acide nitrique. On opère ensuite comme pour le titrage de la solution du cuivre pur.

6). *Sulfate de cuivre* ($SO_4Cu.\,5\,H_20 = 249{,}57$). Nous avons appliqué la méthode de Zecchini. Il faut disposer des trois solutions suivantes:

a) thiosulfate de soude cristallisé 19.878 et 8 g. sulfocyanure d'ammonium par litre,

b) iode, 5,089 g. d'iode et 20—25 g. d'iodure de potassium par litre,

c) Solution de sulfate de cuivre très pur crist. 20 g. par litre, 1 volume solution $a = 1$ volume sol. c.; 2 volumes, sol. $b. = 1$ vol. sol. a.

7). *Le dosage du cuivre en présence du fer.*

a) Il faut le séparer. La séparation avec l'ammoniaque et autres méthodes basées sur la précipitation du fer sous forme de sel basique sont peu exactes.

Koninck recommande la séparation par le cadmium, le zinc ou l'aluminium, ou bien comme sulfure par de l'hydrogène sulfuré ou thiosulfate de soude

D'après Classen [14]) on ajoute un excès d'une solution concentrée de pyrophosphate de sodium ($P_2O_7Na_4.\,10H_2O$); il se forme deux

14) CLASSEN, Massanalyse, pag. 585.

complexes de fer et de cuivre; en présence de l'acide acétique c'est seulement le complèxe cuivrique qui met de l'iode en liberté.

La méthode donne des bons résultats si la quantité de fer est au plus 1/3 de la quantité de cuivre.

8). *La méthode* VOLHARD On ajoute à la solution neutrale de cuivre, chaude et saturée par d'acide sulfureux (ou bien du bisulfite d'ammonium) un excès mésuré de sulfocyanure d'armmonium titré.

On ajoute une solution d'alun de fer et d'ammonium acidifiée par de l'acide nitrique pur, puis on titre l'excès d'ion sulfocyanique par une solution 0,1 *n.* de nitrate d'argent.

Solutions. Nous avons préparé les solutions suivantes:

A. — 1) Une solution $1/10\,\frac{mol}{l}$ $SO_4Cu.\,5H_2O$ dans l'eau distillé. Nous avons pésé 49,9400 g. $SO_4Cu.\,5H_2O$ (p. mol. 249,7; $Cu=63,5$); nous avons dissout dans l'eau, transvasé dans un ballon jaugé de 2000 cm³. et rempli avec de l'eau comme de règle. Cette solution contient donc 0,6350 g. *Cu* dans 100 cm³.; ou bien: 100 g. $SO_4Cu.\,5\,H_2O$ contient 25,48 g. *Cu*.

2) De la même manière une solution de sulfate ferreux pur dans l'eau, qui contient 55,6000 g. $SO_4\,Fe.\,7\,H_20$ dans 2000 cm³. d'eau, c'est-à-dire 0,55584 g. *Fe* dans 100 cm³.

3). Nous avons mélangé 549,45 cm³. de la solution cuivrique No. 1 avec 546,9 cm³. de la solution ferreuse dans un vase bouché à émeri et ainsi nous avons obtenu une solution homogène de 1096.35 cm³.

La composition de cette solution est la suivante:

3,489 g. Cu.
3.054 g. Fe.
3,457 g. S.

Voilà maintenant la raison de ces proportions: On trouve en effet dans VILLAVECCHIA que la composition de la chalcopyrite pure est la suivante:

34,89 g. Cu.
30,54 g. Fe.
34,57 g. S.

B. — 1). D'autre part nous avons analysé deux échantillons de chalcopyrite et trois échantillons de bronzes (valeurs moyennes).

Nous avons employé la méthode donnée par TREADWELL [15]) et STREBINGER [16]).

15). TREADWELL, Manuel de chimie analytique, 1920, t. II, p. 220.
16). R. STREBINGER, Praktikum der quantitativen Chem. Analyse, 2. Aug., 1937; I. Teil, p. 62.

TABLEAU I.

	Nombre de cm³	Calculé	Méthode iodométrique			Dosage à l'état de sulfure cuivreux			Dosage à l'état d'oxyde cuivrique			Méthode Volhard			Méthode Minovici - Ionescu			Méthode Spaçu - Dick			Méthode Zecchini		
			Trouvé (grammes)			Trouve (grammes)			Trouvé (grammes)			Trouvé (grammes)			Trouvé (grammes)			Trouvé (grammes)			Trouvé (grammes)		
			$SO_4Cu.5H_2O$	%	Dif.	$SO_4Cu.5H_2O$	%	Dif.	$SO_4Cu.5H_2O$	%	Dif.	$SO_4Cu.5H_2O$	%	Dif.	$SO_4Cu.5H_2O$	%	Dif.	$SO_4Cu.5H_2O$	%	Dif.	$S_4OCu.5H_2O$	%	Dif
1	10	0,0635	0,0636	25,51	+0,03	0,0638	25,58	+0,1	0,0638	25 58	+0,1	0,0637	25,56	+0,08	0,0601	24,98	−0,5	0,0629	25,43	−0,05	0,0633	25,42	− 0,06
2	15	0,0952	0,0952	25,50	+0,02	0,0956	25,59	+0,11	0,0956	25,58	+0,1	0,0949	25,42	−0,06	0,0937	25,08	− 0,4	0,0950	25,44	− 0,04	0,0954	25,55	+0,07
3	20	0,1275	0,1273	25,45	+0,03	0,1280	25,59	+0,11	0,1280	25,59	+0,11	0,1271	25,41	− 0,07	0,1240	24,78	−0,7	0,1272	25,42	−0,06	0,1279	25,56	+0,08
4	25	0,1592	0,1590	25,45	−0,03	0,1598	25,58	+0,1	0,1598	25,58	+0,1	0,1587	25,40	−0,08	0,1560	24,98	−0,5	0,1589	25,44	− 0,04	0,1586	25,41	− 0,07
5	30	0,1910	0,1911	25,49	+0,01	2,1921	25,58	+0,1	0,1971	25,57	+0,09	0,1917	25,54	+0,09	0,1865	24,88	−0,6	0,1908	25,45	−0,03	0,1915	25 55	− 0,07
6	35	0,2227	0,2229	25,50	+0,02	0,2236	25,59	+0,1	0,2234	25,57	+0,09	0,2222	25,42	−0,06	0,2175	24,88	−0,6	0,2223	25,43	−0,05	0,2224	25,40	− 0,08
7	40	0,2540	0,2538	25,46	− 0,02	0,2550	25,58	+0,11	0,2550	25 58	+0,1	0,2548	25,56	+0,08	0,2480	24,88	− 0,6	0,2537	25,45	−0,03	0,2547	25,55	+0,07

N. B. chaque résultat est la moyenne des plusieurs déterminations.

100 cm³ solution = 0,6350 g. Cu ; 100 g. $SO_4Cu.5H_2O$ = 25,48 g. Cu.

Dét, électrolytique : { 10 cm³ = 0,0634 dif. — 0,04% ; 20 cm³ = 0,1276 dif. + 0,01%

TABLEAU II
(Chalcopyrite)

		I	II
A.	Gangue	31,31	36,78
	Fe	22,66	20,27
	$Fe_2 O_3$	33,78	35,11
	S	19,67	24,01
	Zn	12,51	8,30
	Pb	1,21	1.33
	Ca O	4,58	—

Les valeurs pour *Cu*, par les méthodes :

	Electrolytique	Iodométrique	Sulfure	Oxyde	Volhard	Minovici	Spacu
I	12,51	12,49	12,62	12,64	12,57	12,9	12,46
II	8,30	8,33	8,41	8,42	8,38	8,8	8,34

B. Avec le melange :

Calculé Cu :	Electrolytique	Iodométrique	Sulfure	Oxyde	Volhard	Minovici	Spacu
3,489	3,49	3,50	3,58	3,59	3,45	3,82	3,51

TABLEAU III
(Bronzes)

	I	II	III
Pb	5,19	15,80	—
Sn	1,90	8,45	8,30
Zn	8,23	6,04	—
Fe	1,55	0,42	—
Ni	0,90	0,50	—

Les valeurs pour *Cu*, par les méthodes.

	Electrolytique	Iodométrique	Sulfure	Oxyde	Volhard	Minovici	Spacu
I	82,20	82,22	82,3	82,35	82,82	82,7	82,21
II	67,60	67,63	67,5	67,7	67,67	67,1	67,64
III	91,48	91,45	91,6	91,59	91,42	90,99	91,52

De ces résultats et recherches on peut tirer les conclusions suivantes:

1). *La méthode électrolytique* Le mieux est de doser le cuivre en solution sulfurique. La présence des ions $Fe^{\cdot\cdot}$ et $Zu^{\cdot\cdot}$ ne gênent pas l'opération en solution sulfurique; au contraire, quand la solution est azotique, en présence des ions cités plus haut, il faut évaporer à sec; puis on fait la solution sulfurique.

Dans les tableaux précédants on trouve une partie de nos résultats.

Le dosage est de beaucoup plus rapide en employant des électrodes rotatives ou tout autre dispositif d'agitation.

C'est la méthode la meilleure quand on dispose de l'appareillage nécessaire.

2). *La méthode iodométrique* qui est employée en Amérique dans toutes les usines de cuivre, fournit des résultats aussi exacts que la méthode électrolytique, lorsqu'on observe certaines conditions, à savoir: opérer à l'abri de l'air et en absence de matières oxydantes, en milieu peu riche en cations $H^{\cdot}$ etc. Elle n'est pas applicable en présence de l'ion ferrique (sauf modifications) et d'autres substances oxydantes.

3). *Dosage à l'état de sulfure cuivreux* (précipitation par le thiosulfate de sodium). Le zinc (l'arsenic et l'antimoine en minimes quantités) n'est pas précipité en solution sulfurique. Les lavages sont rapides et l'on ne s'expose pas à voir les solutions passer troubles comme cela se produit souvent lorsqu'on filtre du sulfure de cuivre obtenu par précipitation à l'hydrogène sulfuré.

Mais dans le minérai impur la précipitation préalable à l'hydrogène sulfuré est indispensable.

4). *Le dosage à l'état d'oxydde cuivrique.* Cette méthode donne le plus souvent des résultats un peu trop forts.

La solution doit être exempte de substances oragniques et de sels ammoniacaux.

5). La méthode de Spacu et Dick est très précise et rapide; malheureusement son emploi est limité par la présence des sels amoniacaux, etc.

6). Pour le dosage du cuivre dans le sulfate de cuivre on peut employer la méthode Zecchini.

De notre étude il faut donc retenir la méthode d'analyse de la chalcopyrite et des bronzes; pour y doser le cuivre, on doit employer une des méthodes qui donnent les résultats les meilleurs (comparables avec les moyens du laboratoire respectif) dans les conditions du travail.

BEITRAG ZUR KENNTNIS DER KRYSTALLFORM EINIGER NORMALEN PARAFFIN-KOHLENWASSERSTOFFE MIT GROSSEM MOLEKULARGEWICHT, ISOLIERT AUS ERDÖLWACHS

von **Ion Irimescu**

In der vorstehende Mitteilung wird über der Kristallform einiger paraffinischen normalen Kohlenwasserstoffe mit einem hohen Molgewicht berichet. Die Erscheinung der Krystalle in Form von Platten und Nadeln diesser Kohlenwasserstoffe ist auf die dimorphismische Erscheinung zurück zu führen und ist nicht durch andere Ursachen bedingt, wie manche Verfasser mitgeteilt haben.

Die paraffinischen Kohlenwasserstoffe mit mehr als 20 Kohlenstoffatomen im Molekül, sind feste Körper die bei gewöhnlicher Temperatur, in reinem Zustande farblos und schön kristallisiert sind. Schon seit 1830 hat REICHENBACH [1]) den Erdölwachs untersucht und bemerkt, dass es kristallisiert ist ZALOZIECKY [2]) unterscheidet in seinen Studien über das gewöhnlich als „Paraffin" bekannte Produkt und über Ozockerit, zwei Arten von Paraffin: und zwar ein amorphes und ein kristallisiertes Paraffin. Das kristallisierte Paraffin hat einen höheren Schmelzpunkt als das amorphe. Nach ZALOZIECKY ist das kristallisierte Paraffin mit dem höheren Schmelzpunkt normal. Es soll aus dem amorphen, welches isoparaffinisch sein soll, durch thermische Zersetzung entstehen.

GURWITSCH [3]) vertrat eine verschiedene Ansicht. Auf Grund aufgenommen wurden, stellte er das Vorhandensein von Kristallen in dem von ZALOZIECKY als amorph angegebenen Materialen fest. Er kam somit zu dem Schluss, dass die Bildung der Paraffin-Kristallen von der Viskosität des Mediums, abhängig in welchem die Kristalisation erfolgt, und dass diese die Form des Kristalles bestimmt.

BERGEL [4]) und TANAKA [5]) bestätigen die Ansicht von GURWITSCH. FUSSTEIG [6]) untersuchte die Bedingungen der Kristallisation der Pa-

raffinen, während der Entstehung und entworf folgende Theorie über die kristallinische Form: Jedes einzelne Teilchen von Paraffin ist von zwei Schutzhäutchen umgeben. Das erste bestehend aus einer harzigen Substanz, das Zweite, welches sich auf der Oberfläche des paraffinischen Partikel befindet, aus Kohlenwasserstoffen mit höherem Molekulargewicht.

Wegen der grossen Oberflächen-Spannung der Partikeln können diese also nicht kristallisieren, was die amorphe Gestalt zur Folge hat. Wenn aus irgend einer Ursache eine dieser Häutchen verschwindet, kristallisieren die Paraffine in Platten; wenn beide Häutchen nicht mehr existieren wird die Oberflächen-Spannung gleich Null und dann erscheinen die Nadeln. Podget, Hefley und Henriksen [7]), welche sicht mit diesem Problem gründlich beschäftigt haben, kommen zu dem Entschluss. dass die Zähigkeit des Mediums, die Geschwindigkeit der Abkühlung u. sonstige äussere Faktoren die Kristallform nicht beeinflussen können, sondern nur die spezifischen Eigenschaften der Substanz Dieselben Autoren nehmen ferner noch an, dass die charakteristische Forme der paraffinischen Normal -Kohlenwasserstoffe, die Nadeln sind, und das während der Bildung und des Wachsens der Kristalle, man zuerst die Bildung der Nadeln bemerkt, welche sich dann vergössern, in dreieckigen Platten und später in anderen Plattenformen übergehen. Ist die Lösung verdünnt, dann erscheinen nur die Platten; ist diese konzentriert, dann kommen Nadeln vor. Falls sich die Lösung langsam abkühlt, erhält man beide Formen. Rhodes, Mason und Souton [8]) studierten die Erscheinung unter dem Mikroskop und bemerkten, die Entstehung der Nadeln und der Platten. Sie nehmen an dass beide Formen Dimorphen-Erscheinungen derselben Substanz, sind.

Carpenter [9]) äussert sich über die Theorie der Übergangspunkte, begründet auf einige Inflexionen, welche er in den erziehlten Kurven bemerkt hat. Diese Kurven wurden bei einer Paraffin-Fraktion mit konstanem Schmp. als Funktionen von Temperatur-Ausdehnungskoefizienten bzw. Temperatur-Sp. Gewicht erhalten. Er behauptet dass für jeden Paraffin-Kohlenwasserstoff, beide Formen möglich sind. Die Nadelform ist stabil oberhalb des Übergangspunktes, welches 15—20° unter dem Schmp. liegt; die Platten hingegen sind unter den Übergangspunkt beständig.

Yannaquis [10]) untersuchte mittels Roentgenstrahlen einige Fraktionen, welche durch Destillation im katodischen Vacuum aus

Pechelbronn- Paraffin erhalten worden waren und stellte die Kristallform fest. Der Verfasser beweist auf Grund optisch -kristallographischen Feststellungen, dass in den studierten Fraktionen, ausser den normalen Paraffin-Kohlenwasserstofen, sich auch noch Kohlenwasserstoffe mit einem gesätigten Ring befinden. welche einen bestimmten Einfluss auf die Form der erziehlten Kristallen ausüben. Er stellte ferner fest, dass im reinem Zustande, die normalen Paraffin -Kohlenwasserstoffe in ortorombischen und im monoklinischen Systhem kristallisieren, wo die Nadelform vorherrscht. Der Verfasser beweist dass beim Übergangspunkt eine Änderung der Kristallsymetrie stattfindet und bringt Lichbilder von Kristallen, vor und nach dem Übergangspunkte. Die Achsen -Symetrie ändert sich beim Übergangspunkt im den studierten Kristallen, von einachsig nach zweiachsig.

Das Phänomen des Übergangspunktes ist umkehrbar wobei die Platten in Nadeln ubergehen und umgekehrt. Der Verfasser stellte fest dass die Kristalle mit triklynischen Symetrie einer anderen Klasse von Kohlenwasserstoffen als diejenigen der normalen Paraffinen gehören und zeichnen sich aus durch die sogenannten Nadelsterne welche aus 3 Nadeln gebildet sind. Ihre Kristallform ist nicht gut ausgebildet (sogenannten degenerierte Nadeln).

Hefley [11]) stellte fest, dass die normalen festen Kohlenwasserstoffe zu dem ortorombischen System gehören. Zu diesem Schluss kommen auch Rhodes, Mason und Souton [8]), Tanaha [4]) und Blade [12]) welche die Ergebnisse von Yannaquis bestätigen.

Buchler und Graves [13]) isolierten durch wiederholte Umkristallisierung eine Reihe von Fraktionen, bestehend nur aus normalen Paraffin-Kohlenwasserstoffe und studierten ihre Kristallform. Sie fanden, dass die normalen Paraffin-Kohlenwasserstoffe in Platten und nicht in Nadeln, wie Podget, Hefley und Henriksen glaubten, kristallisieren. Die Nadeln erscheinen nur dann, wenn auch eine Substanz, welche die Verfasser „soft -wax" nennen, zugegen ist. Diese fremde Substanz gehört einer anderen homologen Reihe, und zeigt eine viel grössere Löslichkeit als die normalen Paraffine. Am Anfang der Kristallisation scheiden sich nur die schwerlöslichen Platten der normalen Kohlenwasserstoffe, gegen Ende der Operation, wenn die Lösung konzentrierter ist herrschen die Nadeln vor.

Im Lichte dieser Resultate, behaupten die Verfasser, dass der von Carpenter angegebene Übergangspunkt, nicht real, sondern eine Illusion darstellt. Ferris, Cowles und Henderson [14]) studierten pa-

raffinische Rückstände, aus welchen sie durch Destillation bei ca 1 mmHg Druck und dann durch Umkristallisierung, eine Reihe normalen Kohlenwasserstoffen u. von Kohlenwasserst. anderer Natur erhielten. Sie kommen zu der Schlussfolgerung, dass in derselben homologen Reihe alle Kohlenwasserstoffe derselben Form angehören, dass diese Form spezifisch ist und nicht von der Viscosität abhängt, dass es drei verschiedene Formen unter den festen Kohlenwasserstoffen des Erdölwachses gibt: Platten, Nadeln und eine undefinierte Form. Die Nadeln und die undefinierte Form können ihre Form den Platten einprägen.

Dieselben Autoren sehen an dass die n-Paraffine in Platten kristallisieren und dass die beiden anderen Formen, anderen Reihen von Paraffin-Kohlenwasserstoffen gehören. Dieselbe Meinung vertrat auch Gascard [15]), welcher mit den von ihm sinthetisierten n-Paraffin arbeitete und bemerkte, dass diese wenn sie in reinem Zustande war, immer in Platten kristalisierten.

Zusammenfassend, ergeben sich aus der Literatur folgende Tatsachen und Hypothesen betreffend der Kristallform der festen Kohlenwasserstoffe des Erdöls:

1). Eine Hypothese der Beinflussung der Kristallisation durch das Medium mit folgenden Varianten:

a). Die Zähigkeit der Umgebung kann die Form und Grösse der Kristallen beeinflussen wie Gurwitsch [3]) und auch Bergel [4]) und Tanaka [5]) annehmen.

b). Die Oberflächenspannung des Kristallisationsmediums, welcher die Paraffinpartikeln umhült, kann deren Kristallisation in die eine oder die andere Form entscheiden, Hypothese von Fusteig [6]).

c). Beimengungen fremder Körper anderer Kohlenwasserstoff-Reihen, beeinflussen die Kristallform wie Büchler und Graves [13]) angeben. Derselben Meinung sind auch Ferris, Cowles und Henderson [14]), welche feststellten. dass die Form der n-Paraffine, die Platten sind und die Erscheinung anderer Formen ausser diesen, fremden Kohlenwasserstoffen zuzuschreiben ist.

2). Der Dimorphismus wird durch folgende Faktoren beeinflusst:

a). Der Übergangspunkt welcher die Erscheinung der zwei Formen nach Carpenter [9]) erklärt, wurde auch von Yannaquis [10]) demonstriert.

b). Oder der „spezifischen Eigentümlichkeit" welche die nor-

malen paraff. Kohlenwasserstoffe besitzen, herausgegeben von Podget [7]), Hefley und Henriksen und von Rhodes, Mason und Souton [8]) bestätigt.

Beschreibung der Versuche

Sämmtliche Arbeiten über die Kristallform der festen Kohlenwasserstoffe des Erdöls wurden mit Materialien ausgeführt deren Reinheit nicht sicher ist, denn die Präparate welche für die Versuche angewandt wurden, waren entweder mittels selektiven Lösungsmitteln extrahiert, oder bei einem Druck von 1 mm Hg. destiliert. Wie aus der Literatur ersichtlich ist enthalten diese Kohlenwasserstoffe kleine Mengen von fremden Körpern, welche nach manchen Verfassern, eine grosse Rolle bei der Kristallisation der n-Paraffinen spielen.

Die Körper welche ich in vorliegender Arbeit angewendet habe, wurden durch Sublimieren bei einem sehr niedrigen Druck von 1.10^{-4} mm Hg, enger Fraktionen welche ihrerseits durch successives Extrahieren erhalten worden waren. Über die Reinheit dieser Fraktionen und über ihre Zugehörigkeit zu der n-Paraffinreihe ist früher berichtet worden [16]). Es seien hier noch einige neue Molekulargewichtsbestimmungen nach Pregel-Rast neben ihren Schmelzpunkten angeführt. Daraus wurde dann nach der Formel von C. D. Nenițescu, S. Țițeica und I. Irimescu [17]) die Molekulgrösse berechnet. Wie ersichtlich ist die Übereinstimmung der nach den beiden Methoden gefundenen Molekulargewichte sehr gute.

Kohlenwasserstoff	Schmelzpunkte		Mol. Gew. berechn.	Mol. Gew. gefunden *)	n aus der Formel: $C_n H_{2n+2}$
	Berechn.	Gefunden			
$C_{36} H_{74}$	75,9°C.	75,5—76°C.	506,58	516	36
$C_{40} H_{82}$	81,0°C.	80,5—80,8°C.	562,64	563	40
$C_{41} H_{84}$	82,1°C.	82,5—82,7°C.	576,65	584	41
$C_{44} H_{90}$	85,4°C.	85,0—85,2°C.	618,69	624	44
$C_{46} H_{94}$	87,5°C.	87—87,2°C.	646,73	657	46
$C_{49} H_{100}$	90,3°C.	90—90,5°C.	688,78	706	49
$C_{52} H_{106}$	92,9°C.	92,5—93°C.	730,83	743	52

Die Mikrolichtbilder welche man in Fig. 1—16 sieht, wurden in polarisiertem Licht und 200 fache Vergrösserung ausgeführt mit Hilfe eines Apparates Panphot von der Firma Leitz-Wetzlar.

*) Die Genauigkeit der Molekulargewichtsbestimung für Molekeln mit einer solchen grossen Anzahl von Kohlenstoffatomen wurde um $\pm 2\%$ festgestellt.

Es wurden die 7 Kohlenwasserstoffe aus obiger Tabelle untersucht welche auf Objektträgern ohne Lösungsmitteln kristallisiert wurden, nach der Methode YANNAQUIS [10]), wie in Fig. 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15 u. 16 ersichtlich.

Es wurde die Methode der Kristallisation ohne Lösungsmittel gewählt, um die Wirkung des Lösungsmittels über die Form des Kristalles zu vermeiden. Jede Probe wurde in folgender Weise dargestellt: auf einem Obiecktträger gibt man eine kleine Menge Substantz, welche langsam am Wasserbad, bis zum Schmelzen erwärmt wurde. Dann wurde ein Deckgläschen angebracht und in einem elektrischen Trockenshrank, welcher sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von cca. 0,50°C. pro Minute abkühlte, gebracht. Die Kühlungsoperation von 110° bis auf 55° dauerte ungefähr 120 Minuten. Die Kurve der Abkühlungsgeschwindigkeit war eine gerade Linie.

Um den Einfluss des Lösungsmittel auf die Form der Kristalle festzustellen wurde auch die Kristallisation aus verschiedenen Lösungsmittel untersucht.

Die Kristallisation in einem Lösungsmittel mit einem höheren Siedepunkt z. B. Nitrotoluol und Paraffinöl, wurde wie folgt ausgefuhrt:

Man gibt einige Kristalle auf den Objektträger, dann gibt man 1—2 Tröpfen des Lösungsmittels, bedekt mit einem Deckgläschen, erwärmt schwach bis zur vollständigen Lösung und lässt im Trockenschrank erkalten. Wenn der Trockenschrank 55° erreicht hat, nimmt man die Probe heraus und lässt diese bis auf Zimmertemperatur abkühlen. Die gegenwärtigen Photographien geben keine allgemeine Übersicht der Platte, sondern nur Teile über die Form der erziehlten Kristallen, welche hauptsächlich interessieren und die das Objekt der vorliegenden Mitteilung, bildet.

Man beobachtet, sowohl bei denen ohne Lösungsmittel erhaltenen Kristalle wie auch bei denen mit einen höhersiedenden Lösungsmittel, wie Nitrotoluol oder Paraffinöl, oder auch bei Lösungsmittel mit tiefen Siedepunkt wie Alkohol, dass beide Formen u. zw. Nadeln und Platten entstehen.

In Fig. 1 ist der Kohlenwasserstoff $C_{36}H_{74}$ ohne Lösungsmittel aufgenommen, wobei beide Formen ersichtlich sind. Infolge Überlagerung der Kristalle erscheinen diese nicht deutlich, bei direkter Beobachtung mit dem Mikroskop, können sie besser beobachtet werden. Um die Platten und Nadeln besser sichtbar zu machen wurde im Bild (Fig. 2) die Umrisse des Bildes Fig. 1 mit Tinte

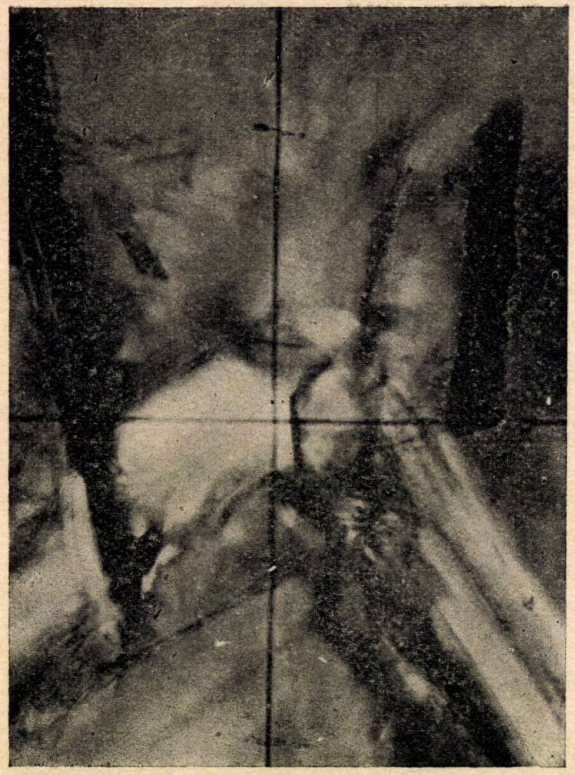


Fig. 1. - C_{36} H_{74} ohne Lösungsmittel

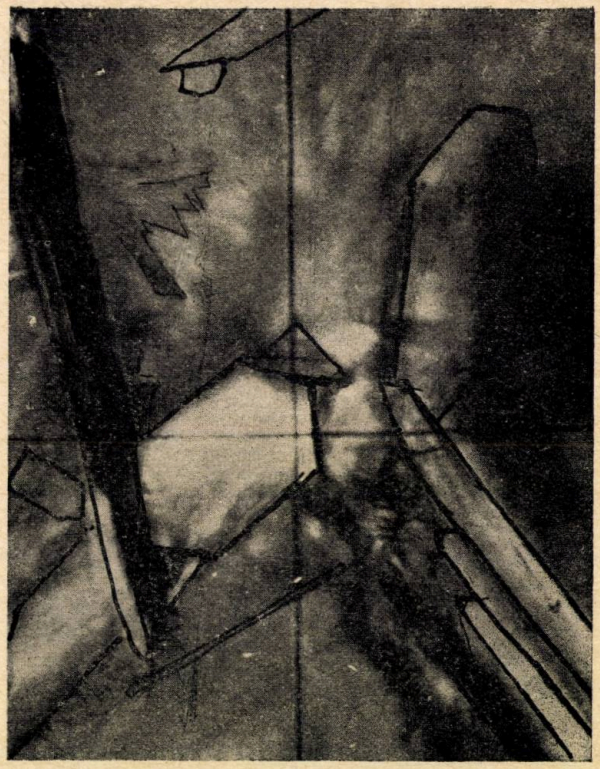


Fig 2. - Dieselbe

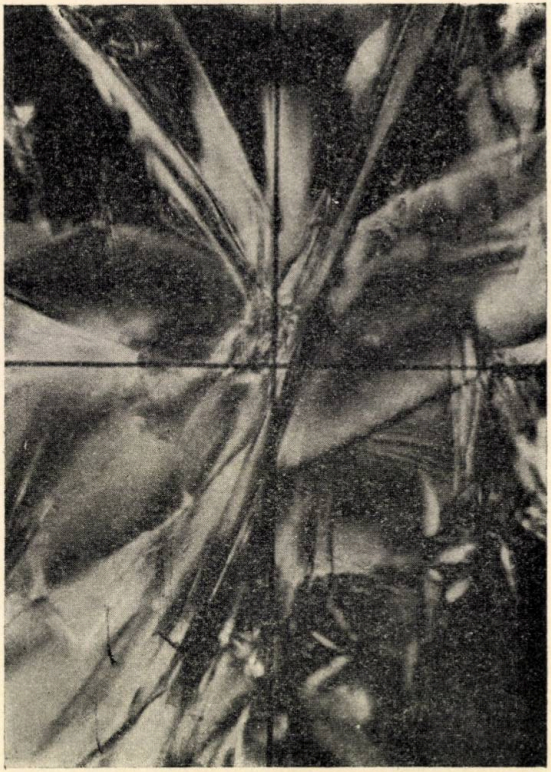


Fig. 3. - $C_{36}\ H_{74}$ aus Alkohol

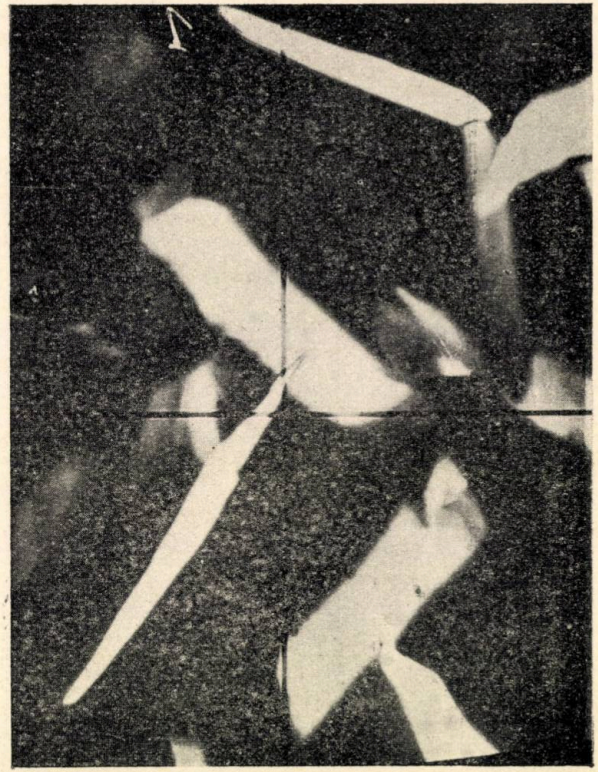


Fig. 4 - $C_{36}\ H_{74}$ aus Nitrotoluol

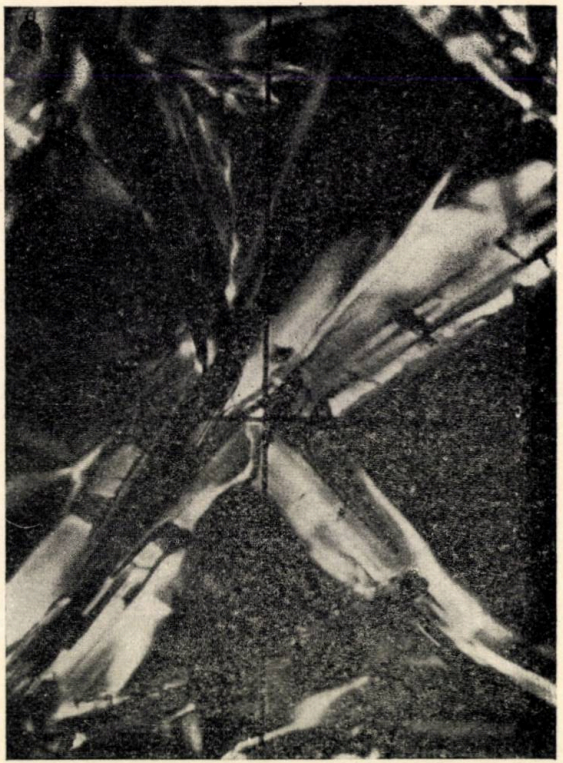


Fig. 5. - C_{40} H_{82} ohne Lösungsmittel

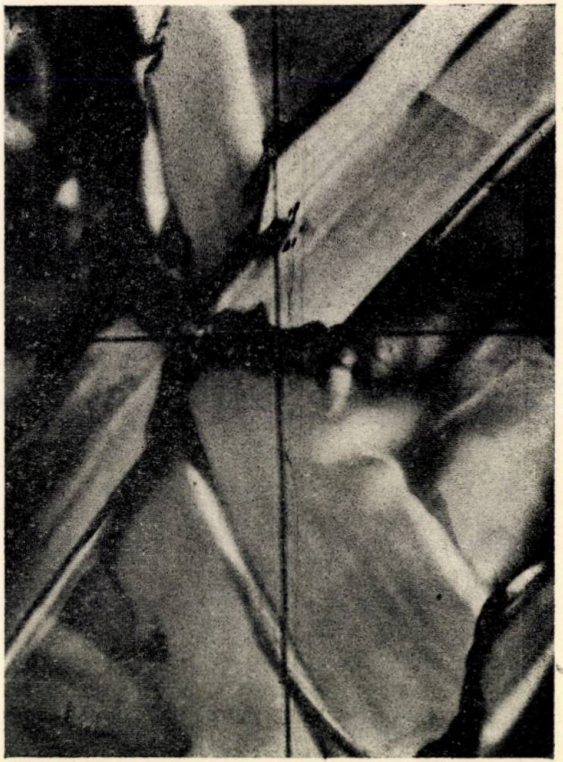


Fig 6. - C_{41} H_{84} ohne Lösungsmittel

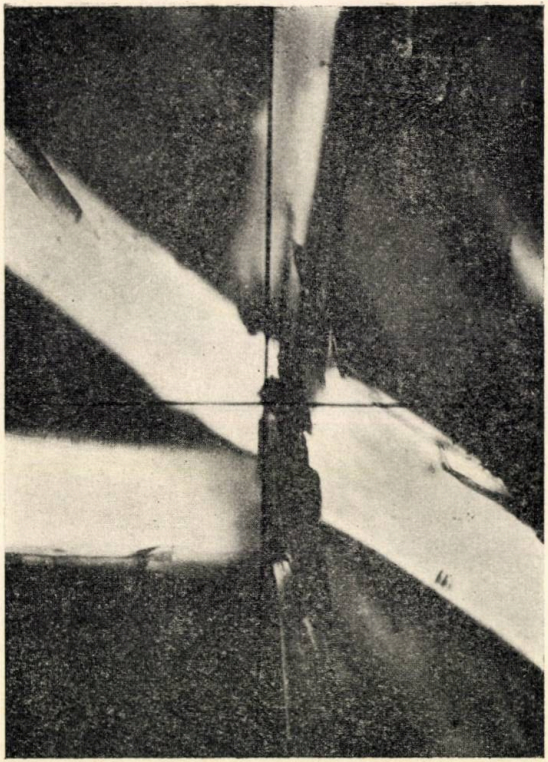


Fig. 7. - C_{44} H_{90} ohne Lösungsmittel

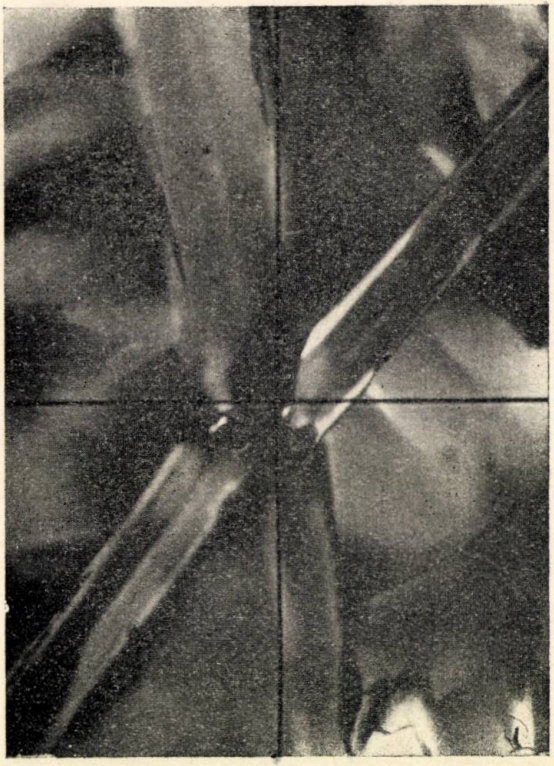


Fig. 8. - C_{46} H_{94} ohne Lösungsmittel

Fig 9. - C_{49} H_{100} ohne Lösungsmittel

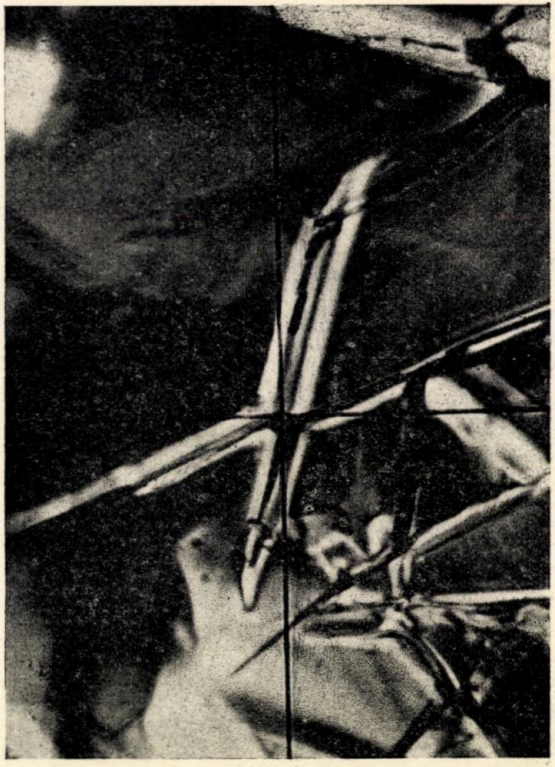
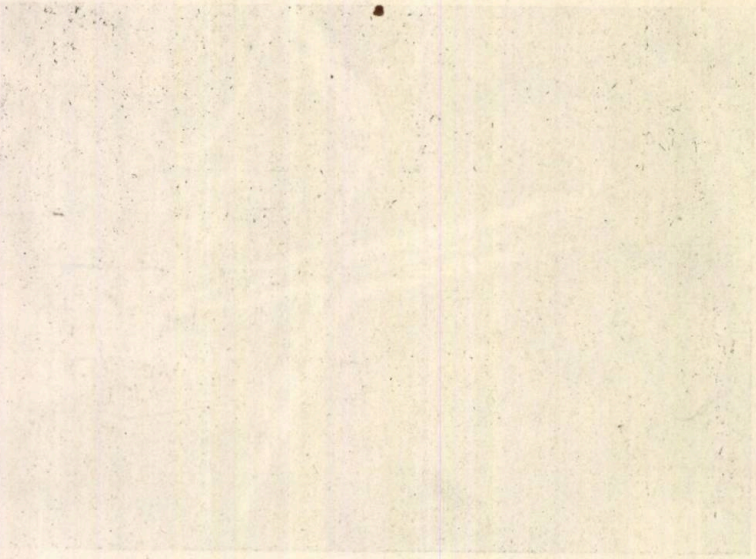


Fig 10 - Dieselbe mit dem Kristal von der Mitte



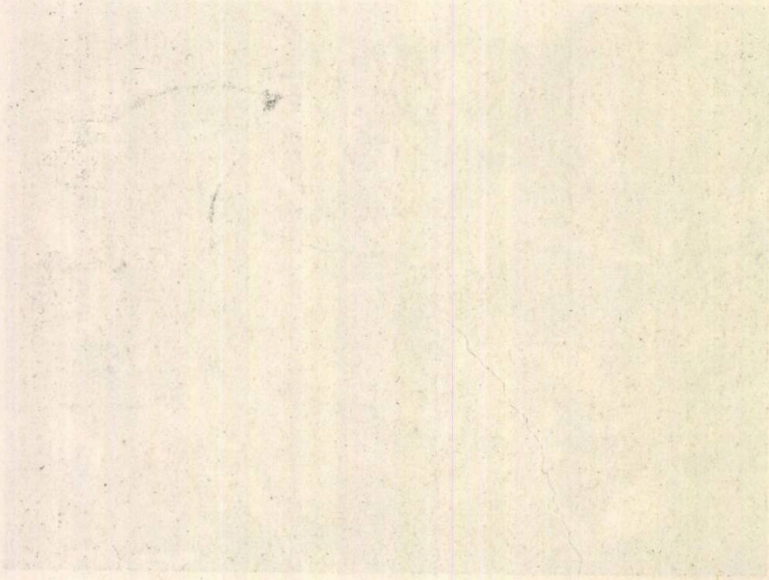


Fig. 11. - C_{52} H_{106} ohne Lösungsmttiel

Fig. 12. - Diesselbe aus Nitrotoluol

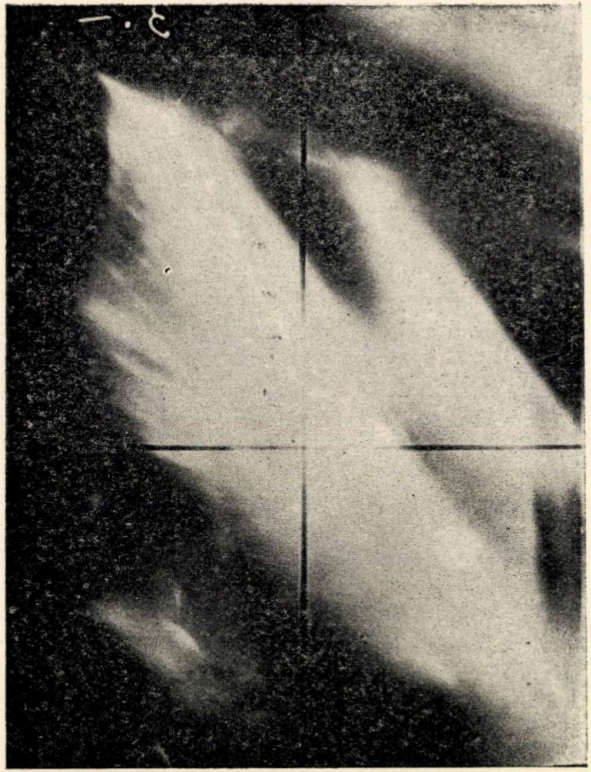


Fig. 13. - C_{52} H_{106} aus Parafinöl

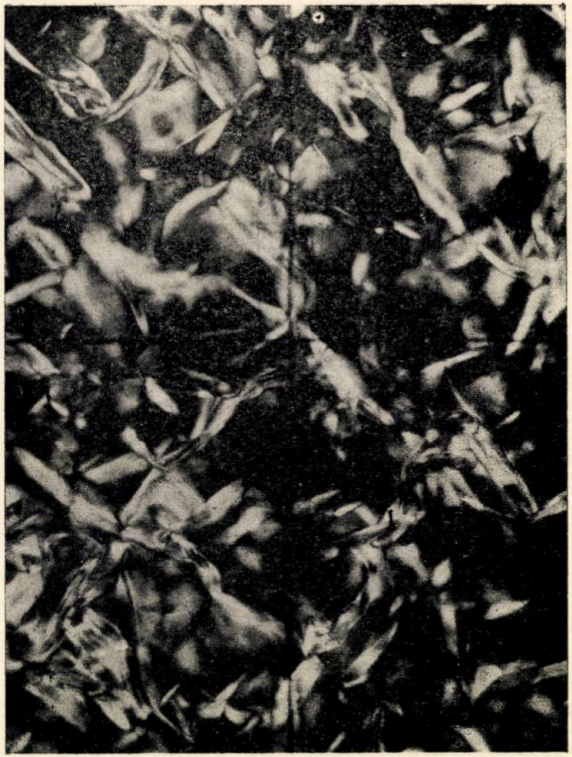


Fig. 14 - C_{36} H_{74} ohne Lösungsmittel und schnelle Kühlung

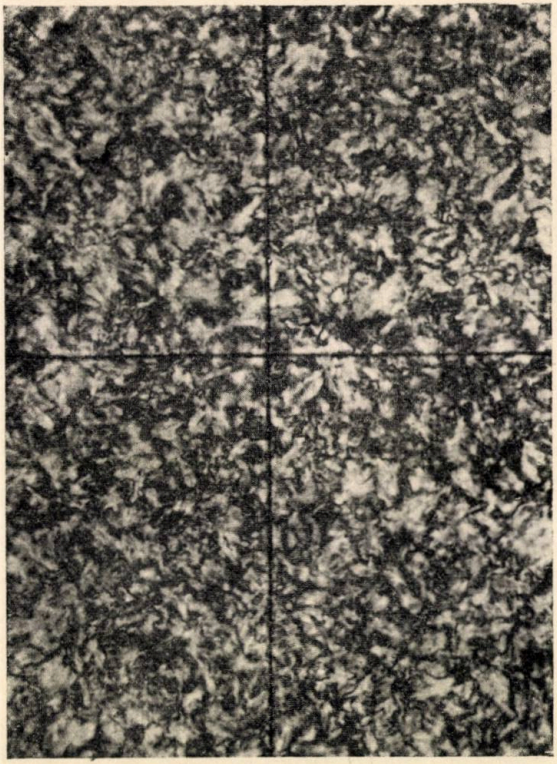


Fig. 15. - Hartes Rezidium zurückgeblieben vom sublimation der obigen Körper

Fig. 16. - Käufliches Paraffin mit Schmp. 52°C nach ÜBBELOHDE ohne Lösungsmittel

kenntlich gemacht, so dass die Nadeln und Platten welche bei direkter Beobachtung sichtbar sind, kenntlich werden. In Fig. 3 und 4 ist derselbe Kohlenwasserstoff photographiert aber in verschiedenen Lösungsmitteln; bei Nr. 3 ist die Kristallisation in Alkohol ausgeführt aber nicht im Trokenschrank gekühlt. Im Bilde Nr. 4, ist die Kristallisation in Nitrotoluol und im Trockenschrank ausgeführt. In beiden Fällen bemerkt man Nadeln und Platten von verschiedenen Formen.

Dies bemerkt man in allen Bildern und auch bei direkten Beobachtung der Kohlenwasserstoffe, besonders deutlich in Fig. Nr. 9, 10 und 12 die entscheidend sind. Wiederholung der Proben mit denselben Körpern führen zu gleichen Ergebnissen.

In Fig. 15 ist ein hartes Residium wiedergegeben, welches wahrscheinlich Bestandteile, welche nicht zu der Paraffinreihe gehören enthelt. Man bemerkt dass dieses keine kristallinische Form zeigt.

In Fig. 16 ist die Mikrophotographie eines käuflichen Paraffin mit Schmelzpunkt 52° (nach Ubbelohde) wiedergegeben, in welchem man degenerierte Nadel sieht, wie Yannaquis berichtet.

Das Studium der Kristallform einer reinen Parafin-Fraktionen führte zu folgenden Feststellungen:

1) Es wurde beide Formen gefunden: Nadeln und Platten, gleichgültig ob man mit oder ohne Lösungsmittel arbeitet und langsam oder schnell abgekühlt hat. Bei einer schnellen Abkühlung bemerkt man eine Unregelmässigkeit der beiden Formen.

2) Die Ursache der plötzlichen Erscheinung der beiden Formen ist dem Dimorphismus-Phänomen zuzuschreiben, welches sich durch der Übergangspunkt erklärt.

3) Faktoren wie: Die Viscosität des Mediums oder die Natur des Lösungsmittel können bestimenden Einflus auf die Kristallform der n-Paraffine nicht haben.

4) Die Behauptung Ferris und dessen Mittarbeiter, dass die Nadeln und die „undefinierte Form", wenn sie in grosser Menge zugegen sind, ihre Formen den Platten einprägen könten, ist durch die Bilder Fig. 4 und 12 absolut widerlegen.

Literatur-Verzeichnis

1) *Aus dem Artikel von* Fussteig *Reffiner 10. 472. 1937.*
2) Zaloziecky. *Ztschr. angenw. Chem. 1. 261, 318, 1888.*
3) Gurwitsch. *Wissenschaftliche Grundlagen der Erdölbestandteilung. II Auflage. 1925 Berlin.*
4) Bergel-*Petr. Ztschr. 14. 173. 1918.*

5) TANAKA *Journ. Fac. Engin. Tokyo. Imp. Univ. 15.17.1928 aus der* HOLDE *s. 289 VII. Auflage 1933.*
6) FUSSTEIG. *Reffiner 10. 472. 1937.*
7) PODGETT, *Heley und* HENRIKSEN. *Ind. Engin. Chem. 18. 832. 1926.*
8) RHODES, MASON *und* SOUTON, *Ind. Engin. Chem. 18. 832. 1926.*
9) CARPENTER. *Jurn. I.P.T. 12. 239. 1926.*
10) YANNAQUIS, *Annales de l'Office National des Combustibles Liquides p. 295–321, 1934*
11) HEFLEY. *Disertation Univ. of. Oclahoma 1927.*
12) BLADE. *U.S.Bur. of Mines Bull. No. 348. 1932.*
13) BUCHLER *and* GRAVES. *Ind. Engin. Chem. 19. 718. 1927.*
14) FERRIS. COWLES *and* HENDERSON. *Ind. Engin. Chem. 23. 681. 1931*
15) GASCARD. *An. Chim. 15 332. 1921.*
16) C. D. NENIŢESCU *und* I. IRIMESCU *Österreicher Chemiker-Zeitung Nr. 1/2 1–10 1941.*
17) C. D. NENIŢESCU, S. ŢIŢEICA *und* I. IRIMESCU. *Naturwissenschaften 26. 38 629. 1938.*

620.1 MATÉRIAUX DE CONSTRUCTION

SUR LES PROPRIETÉS D'ISOLATION CALORIQUE DES DECHÉTS DE MICA EN RAPORT AVEC LES MATÉRIAUX USUELS

par **Serban Solacolu**

Par l'examen du mica en paillettes, provenant des déchéts d'une des carrières roumaines, rapporté au certains matériaux usuels, on met en évidence les propriétès du mica du point de vue de l'isolation calorique.

Le coéfi.ient de conductibilité calorique trouvé est très reduit et comparable au liège et au kieselgur.

Gèneralement, les suivent matériaux naturels sont connus et utilisés — à un grand degré — pour l'isolation thermique: *le bois, le liège, l'asbest, le kieselgur,* et parmi les matériaux artificiels nous citons: la *laine de verre.* Recentement on a signalé le *mica* en paillettes, qui provient des déchéts, si abondents, des carrières de mica, comme étant un matériel éminament isolateur de chaleur.

Pour la Roumanie, *le liège* reste un matériel importé; de même *l'asbest,* quoique se trouvant dans quelques régions, son exploatation n'est pratiquement possible, ni quantitativement ni calitativement.

Parmis les matériaux indigènes disponibles en grandes quantités nous citerons les matériaux *ligneux* et végétaux en general, lesquels étant inflammables, sont d'un emploi trop réduit; le *kieselgur* et le *mica* sont disponibles, quantitativement et calitativement en grandes quantités exploitables.

En ce qui concerne le *mica* comme matériel isolateur thermique exception faite des données trop sommaires très recentes et encore encore incomplètes de la littérature technique, le matériel est presque ignoré de ce point de vue.

En ce qui suit, nous chercherons à referer à base des données

expérimentales, mettant en evidence ses interessantes propriétées d'isolation thermique en rapport avec les matériaux usuels.

A l'exception des plaques de liège, tous les matériaux essayés, en ce qui suit, sont des matériaux indigènes: le kieselgur autant que le mica proviennent des carrières en exploitation de notre pays.

1. Méthode expérimentale.

La détermination des coéficients de conductibilité thèrmique a été faité à l'aide d'une apparature construite d'après LAMORT (fig. 1). Notre appareillage est composé d'un four éléctrique générateur de chaleur *(A)*. Le paroi (1) est formé d'une plaque métallique chauffée, la témperature de cette plaque étant donnée par le ther-

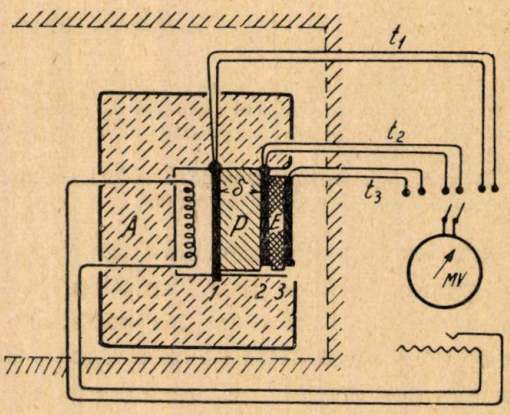


Fig. 1

moélement t_1. L'echantillon d'essai du matériel *(P)* auquel on veut établir le coéficient de conductibilité calorique est formé d'une plaque de 25×12 cm. d'épaisseur δ cm, découpée du matériel respectif et placée avec une des surfaces, aussi près que possible et étanche à la plaque (1). Sur la surface opposée de la plaque d'essai *(P)* on a monté l'appareil etalon LAMORT, formé d'une plaque de cuivre (2) solidarisée à une plaque etalon de verre *(E)*, fixée, à son tour, à une autre plaque de cuivre (3). Le coefficient de conductibilité calorique de la plaque étalon de verre *(E)* est connu. Les thermoéléments t_2 et t_3 donnent les températures des plaques de cuivre (2) respectivement (3). L'ensemble de l'apparature a été monté dans une chambre complètement isollée et dépourvue de courants d'air, tout le temps de l'opération; la commande du chauffage, la lecture des températures étant faites d'une chambre voisine.

La chaleur développée par la plaque chauffante (1) et qui tra-

verse notre système, formé par le série des plaques 1—*P*—2—*E*—3 est:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} s (t_1^0 - t_2^0) z = K s (t_3^0 - t_3^0) z$$

ou:

Q=la quantité de chaleur kcal.

λ = le coéficient de conductibilité calorique de l'echantillon d'essai kcal/heure/m/m²/°C.

δ=l'épaisseur de l'echantillon d'essai m.

s=la surface des plaques *(P,2,E,3)* m².

t_1^0, t_2^0, t_3^0=les températures des plaques (1,2,3,) °C.

z=le temps en heures.

$K = \frac{\lambda_0}{\delta_0} = 1{,}400$ la constante de la plaque étalon de verre *(E)*.

L'équation de laquelle on peut deduire la valeur du coéficient de conductibilité calorique de l'échantillon d'epreuve:

$$\lambda = \frac{1{,}4 (t_2^0 - t_3^0)}{(t_1^0 - t_2^0) \frac{1}{\delta}}$$

On a expérimenté les matériaux suivants:

1. *Béton* de ciment;
2. *Brique de maçonnerie* normale, cuite;
3. *Bois:*

a) planche de sapin.

b) „Stabilit" plaque en taille de bois aglomérée au ciment (fabrication indigène).

4. *Liège:* plaque des granules de liège expandée, aglomérée au bitum (fabrication indigène).
5. *Kieselgur:*

a) kieselgur de *Filia-Brasov* en poudre.

b) brique de kieselgur de *Filia* aglomérées avec de la'rgile fabriquées par la cuisson (fabrication indigène).

6. *Mica:*

a) plaques de mica-mouskovit en paillettes provenant d'une carrière roumaine, aglomerées aux liants bitumineux.

b) plaque de mica-mouskovite en paillettes, provenant d'une carrière roumaine, aglomérée aux liants silicieux.

Il est notoire que la valeur du coéficient de conductibilité calorique d'un même matériel est variable avec:

a) La structure du matériel — la porosité — le poids volumétrique: pour le même matériel, plus sa porosité est grande et implicitement son poids volumétrique plus petit, plus l'isolation thermique du matériel est meilleure, sa structure étant fonction du degré de compression à la fabrication du matériel. C'est à cause de cela que nous avons mentionné pour tous les matériaux, étudiés en ce qui suit, le poids volumétrique.

b) La température du matériel auquel on fait la determination du coéficient de conductibilité calorique. Aux températures élevées, les matériaux ont la conductibilité augmentée. En ce qui suit, à chaqune de nos déterminations nous allons mentionner la température de la determination respective.

Nr	Le Matériel		Le coéficient de conductibilité calorique λ = Kcal / heure / m / m² / °C	
	La nature du matériel	Le poids volumétrique kg/litre	La température t_1^0 à laquelle fut effectuée la determination de λ	λ
1	*Béton* de ciment	2,2 kg/l	98°	λ = 1,205
2	*Brique de maçonnerie* normale cuite	2.0 kg/l	120° 200°	λ = 0.603 λ = 0.770
3	*Bois:* a) Planche de sapin	—	100°	λ = 0.150
	b) „Stabilit" plaques en taille de bois aglomerée au ciment	0.44 kg/l	202°	λ = 0.138
4	*Liège* plaques aglomérées au bitume	0.34 kg/l	90° 200°	λ = 0 064 λ = 0.107
5	*Kieselgur*: Filia Brasov a) en poudre	0.30 kg/l	99°	λ = 0.066
	b) briques cuites de kieselgur et d'argile	0.85 kg/l	80°	λ = 0.29
6	*Mica:* a) Plaques agloméré au liant bitumineux	0.74 kg/l	100° 210°	λ = 0.122 λ = 0.152
		0 48 kg/l	100° 140°	λ = 0.062 λ = 0.097
	b) plaques agloméré au liant silicieux	0.63 kg/l	100° 190° 305° 395°	λ = 0 163 λ = 0.196 λ = 0.214 λ = 0 254

CONCLUSIONS

Examinant le mica-mouskovite, en paillettes, provenant comme déchets d'une des carrières roumaines, par rapport aux quelque matériaux usuels, nous avons mis en évidence les proprietés intéressantes du mica du point de vue de l'isolation calorique.

Les paillettes de mica se laissent faire agloméŕer sous forme de briques ou plaques, en employant un liant silicieux ou bitumineux.

Les plaques confectionnées de paillettes de mica par un compréssion avancée, caracterisées par un poids volumetrique 0,65—0,75 kg/litre, sont des matériaux isolateurs de chaleur; leur coéficient de conductibilité calorique est reduit et comparable à l'asbest.

Les plaques confectionnées de paillettes de mica sans compression avec une structure gonflée, caractérisées par un poids volumetrique réduit 0,48 kg/litre, sont des matériaux d'une capacité d'isolation thermique éminament remarcable; leur coéficient de conductibilité calorique est très reduit et comparable au liége et au kieselgur. En outre des plaques de liège celles de mica offrent l'avantage d'un matériel noninflamable, et en conséquence convenant pour les isolations aux température élevées.

620.1 MATÉRIAUX DE CONSTRUCTION

ÜBER DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN MÖRTEL UND BETONFESTIGKEIT

von **Dr. A. Steopoe**

Es wurde den Einfluss von groben Zuschlägen auf die Druckfestigkeit von Zementmörteln beim konstanten Wasserzementfaktor untersucht. Im Gegensatz zur Feststellung von O. Graf, wurde die Druckfestigkeit herabgesetzt, was der Behauptung von Gilkey entspricht und von der Oberflächenart der Zuschlagskörner verursacht ist.

Prof. O. GRAF hat gefunden, dass ein Schotterzusatz zum Mörtel beim unveränderten Wasserzementfaktor, die Festigkeiten erhöht. [1]) Im Gegensatz zu dieser Feststellung steht die Behauptung von GILKEY, dass die Festigkeit einer Mischung aus konstanter Zusammensetzung Wasser: Zement: Sand durch einen Zusatz von groben Zuschlägen herabgesetzt wird. [2]) Bei solchen Zusätzen von groben Zuschlägen zum Mörtel, ohne den Wasserzementfaktor zu verändern, spielen sich in der Mischungsmasse zwei Haupterscheinungen, welche die Festigkeiten des entstandenen Betons beeinflussen, und zwar:

a) Eine Verminderung des Wasserzementfaktors infolge der Benetzung der groben Zuschläge, welche, unter bestimmten Bedingungen, eine Erhöhung der Festigkeiten verursachen kann.

b) Eine Herabsetzung des Verhältnisses Zement: Zuschläge, welche immer eine Verminderung der Festigkeiten hervorruft.

Sehr wahrscheinlich, ist die gleichzeitige Wirkung dieser zwei Erscheinungen additiv, so dass Festigkeitserhöhungen nur dann festzustellen sind, wenn die Herabsetzung des Wasserzementfaktors den grössten Einfluss ausübt.

---

1. O GRAF: Versuche über den Einfluss der Beschaffenheit der groben Zuschläge auf die Eigenschaften des Betons. S. 31—33. (1937).
2. GILKEY: The coarse aggregate in the concrete. American Concrete Institut. (1927).

Die Zuschläge aus der Gegend von Bucureşti bestehen aus runden Körnern von Quarz, mit einer glatten und dichten Oberfläche, so dass der Wasserbedarf für ihre Benetzung klein ist. Daher muss man erwarten, dass bei der Einführung solcher Kiesfraktionen in Mörtelmischungen, die Herabsetzung des Mischungsverhältnisses die Hauptrolle spielt, so dass die Festigkeiten herabgesetzt werden. Die vorliegenden Untersuchungen haben den Zweck diese Behauptung zu prüfen.

Arbeitsmaterial und Arbeitsweise.

Für diese Untersuchungen habe ich einen normalen Portlandzement und Kiessand aus den Gruben der Gegend von Bucureşti benützt. Die Zuschläge wurden zuerst sorgfältig (um nicht den feinen Anteil zu verlieren) gewaschen, dann getrocknet und gemäss der rumänischen Normen, in den folgenden drei Fraktionen mittels Rundlochsiebe getrennt:

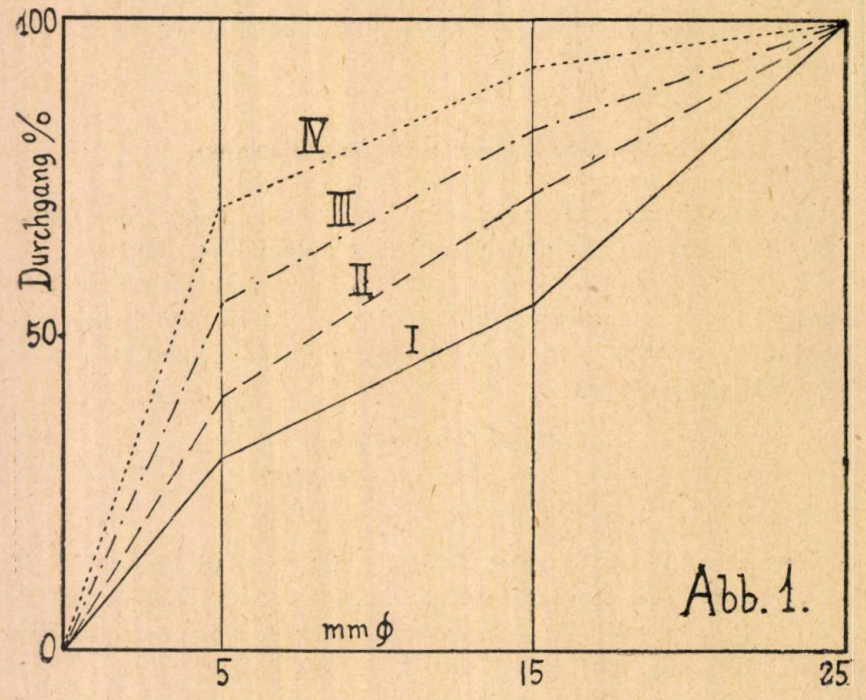
0 — 5 mm Sand.
5 — 15 „ Feinkies.
15 — 25 „ Grobkies.

Der Arbeitsplan umfasste Untersuchungen über Betone 1:6 mit vier verschiedenen Kornzusammensetzungen, deren Kurven in der Abb. 1 angezeigt sind. Betrachten wir als Mörtel die Betonfraktion, welche durch das Sieb mit 5 mm Lochdurchmesser hindurchgeht, so werden die vier Betone die folgenden Zusammensetzungen für ihre Mörtelanteile haben:

Kornzusammensetzung	I	II	III	IV
Mischungsverhältnis des entsprechenden Mörtels	1 : 1,8	1 : 2,4	1 : 3,3	1 : 4,2

Diesen vier Mörteln habe ich eine plastische Konsistenz (mit dem grossen Rütteltisch gemessen) gegeben und ohne den Wasserzementfaktor zu ändern, die folgenden 5—15mm Kiesfraktionen zugesetzt. Die erhaltenen Mischungen wurden auf Konsistenz geprüft und aus ihnen Würfel für die Druckfestigkeit-Bestimmung angefertigt. Dann habe ich neue Mischungen mit denselben Zusammensezungen, aber erhöhten Wasserzusätzen hergestellt, um wieder plastische Massen zu bekommen. Diese wurden als soche und nach der Einführung der 15—25mm Kiesfraktionen, ohne den Wasserzementfaktor zu ändern, geprüft. Endlich wurden auch diese letzten

Mischungen, welche die vollständigen Betone darstellen, im plastischen Zustand geprüft. In dieser Weise habe ich den Einfluss der groben Zuschläge beim konstanten Wasserzementfaktor, sowie den Einfluss des erhöhten Wasserzusatzes beim konstanten Zuschlagsgehalt bestimmt. Als Probekörper für die Mischungen, welche Zu-



schlagskörner bis 15mm enthielten, dienten 7,07cm-Würfel und für die Betone 10cm-Würfel. Die Probekörper wurden nach 24 Stunden entformt, noch 6 Tage unter feuchten Säcken gelassen und dann im Zimmer, in freier Luft, 21 Tage aufbewahrt und auf Druckfestigkeit geprüft. Die erhaltenen Zahlen sind Mittelwerte aus drei Probekörper.

Besprechung der Versuchsergebnisse.

In der folgenden Tafel habe ich die Zusammensetzung der Mischungen, sowie die entsprechenden Konsistenzen und Festigkeiten angezeigt. Um die Variation dieser zwei Werte leichter zu sehen, habe ich zwei graphische Darstellungen gezeichnet; in der ersten (Abb. 2) ist die Variation des Ausbreitmasses und in der zweiten (Abb. 3) die der Druckfestigkeit, beide als Funktion des Wasserzementfaktors dargestellt. Die verschiedenen Mischungen sind mit

denselben Zahlen und Buchstaben, wie in der Tafel angezeigt. In beiden Abbildungen wurde jede Kornzusammensetzung mit einer besonderen Linienart gezeichnet und zwar:

Kornzusammensetunzg I ——————————
„ II — — — — — — —
„ III —·—·—·—·—·—·—
„ IV ----------

Kornzusammensetzung	Mischungsart	Zusammensetzung der Mischungen in Gewichtsteilen					Wasserzementfaktor	Ausbreitmass (cm)	Druckfestigkeit (Kg / cm²)
		Zement	Zuschläge 0–5	Zuschläge 5–15	Zuschläge 15–25	Wasser			
Kurve I	A	1,66	3.00	—	—	0,72	0,43	49	468
	B	1,66	3.00	2 50	—	0,72	0,43	30	465
		1,66	3.00	2.50	—	0,83	0,50	48	430
	C	1,66	3.00	2.50	4.50	0,83	0,50	—	312
		1,66	3 00	2.50	4.50	1.00	0,60	42,5	270
Kurve II	A	1.66	4.00	—	—	0,83	0,50	47,5	448
	B	1.66	4 00	3.20	—	0,83	0,50	32,5	400
		1.66	4.00	3,20	—	1.00	0,60	46	326
	C	1.66	4 00	3,20	2,80	1.00	0,60	33	290
		1.66	4.00	3,20	2,80	1.10	0,66	47	241
Kurve III	A	1.66	5 50	—	—	1.06	0.64	51	289
	B	1 66	5 50	2.70	—	1.06	0.64	41	282
		1.66	5 50	2.70	—	1.16	0.70	49	269
	C	1.66	5,50	2.70	1.80	1.06	0.64	30	255
		1.66	5,00	2 70	1.80	1.16	0.70	43	235
Kurve IV	A	1.66	7.00	—	—	1.23	0 74	50	254
	B	1 66	7.00	2 20	—	1 23	0,74	39,5	230
		1.66	7.00	2 20	—	1.31	0,79	48	202
	C	1.66	7.00	2.20	0.80	2.23	0,74	33,5	192
		1.66	7.00	2 20	0.80	1.31	0,79	44	180

Die erhaltenen Ergebnisse führen zu den folgenden Schlüssen:

1. Die Einführung einer gröberen Zuschlagsfraktion in eine Zement-Sand- oder Zement-Sand-Feinkies-Mischung, ohne den Wasserzementfaktor zu ändern, hat in allen untersuchten Fällen

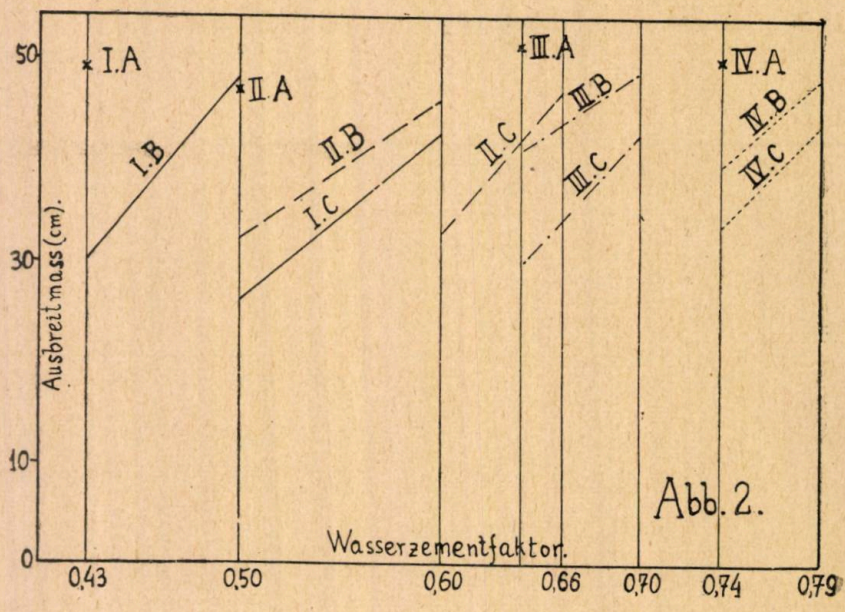


Abb. 2.

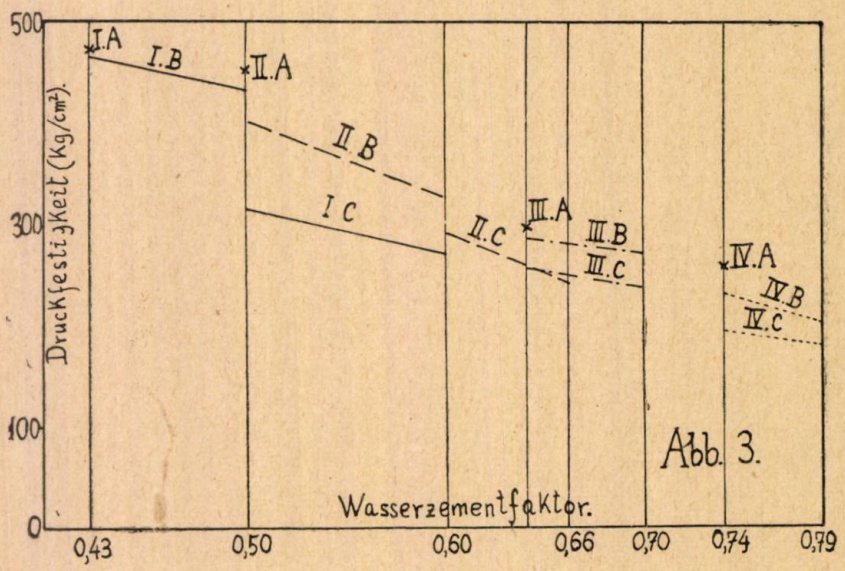


Abb. 3.

einen Festigkeitsrückgang hervorgerufen, obwohl die neue Mischung immer steifer als die ursprüngliche war. Das bedeutet, dass bei den untersuchten Zuschlägen, die Herabsetzung des Mischungsverhält-

nisses die stärkste Wirkung auf die Festigkeit ausgeübt hat, was von der Oberflächenart des benützten Materials bedingt wurde.

2. Nehmen wir zwei benachbarten Mischungen (A und B, oder B und C) derselben Kornzusammensetzung und mit demselben Ausbreitmass, und beziehen den Mehrverbrauch an Anmachewassersmenge prozentuell auf die eingeführte Kiesfraktion, so bekommen wir die Wassersmenge, welche für die Benetzung der eingeführten Kiesfraktion notwendig ist. Für eine und dieselbe Kiesfraktion sind die erhaltenen Werte nicht konstant, sondern um so grösser, je steifer die ursprüngliche Mischung war, nämlich:

Uebergang von A zu B.

Kornzusammensetzung	Ausbreitmass A	Ausbreitmass B	Benetzungswasser
II	47,5 cm.	46 cm.	5,2 %
I	49 „	48 „	4,2 „
IV	50 „	48 „	3,6 „
III	51 „	49 „	3,3 „

Uebergang von B zu C.

	B	C	
III	40,7 cm.	43 cm.	5,5 %
II	46 „	47 „	3,5 „

623.4 BALISTIQUE

LE PROBLEME DE LA BALISTIQUE EXTERIEURE

par **I. Lințeș**

Le problème de la Balistique Extérieure a été étudié et partiellement résolu jusqu'à présent, à l'aide des plusieurs hypothèses Les résultats ont satisfait les balisticiens tant que les exigeances du tir n'ont été trop grandes.

Mais aujourd'huis, quand les besoins de la guerre imposent des conditions de tir plus sevéres, le problemé devient plus délicate.

Nous nous sommes proposés donc de reprendre ce problème du commencement même, d'examiner minutieusement chaque influence et d'établir les équations complètes du mouvement des projectiles et des bombes.

Introduction

La *Balistique Extérieure* s'occuppe du mouvement des projectiles et des bombes sur la trajéctoire.

Les mouvements d'un projectile ou d'une bombe sur sa trajéctoire, peuvent se classer en deux catégories:

— le mouvement du centre de gravité;

— le mouvement autour du centre de gravité.

Les études faites sur ces mouvements sont devenues classiques aujourd'hui, quoique théorétiquement le problème n'est pas encore parfaitement connu.

Ce problème, tel qu'il a été étudié et partiellement résolu jusqu'à présent, a dû faire appel à plusieures hypothèses, les unes vérifiées, les autres plutôt admises pour aider et même pour simplifier le calcul.

Les résultats ont contentés les balisticiens tant que les exigeances du tir n'ont été trop grandes.

Mais aujourd'hui, quand les besoins de la guerre imposent des conditions de tir bien plus sévères et des projectiles plus éfficaces, donc de puissances plus grandes, le problème de la Balistique Extérieure devient plus délicat, les nombreuses hypothèses et les nombreuses approximations faites aboutissant à des résultats qui ne correspondent plus à la réalité.

Je me suis donc proposé de reprendre ce problème du commencement même et d'examiner minutieusement chaque influence. Ainsi je soumettrai aux lecteurs l'état des choses — tel que je les vois — en leur adressant mon vif désir, de me faire connaître leurs observations, leurs vraies critiques, car une pensée sans contrôle, peut facilement se tromper.

Je leur remercie d'avance avec reconnaissance.

La position du projectile dans l'espace

La projéction de la trajéctoire sur les trois plans de l'espace (fig. 1)

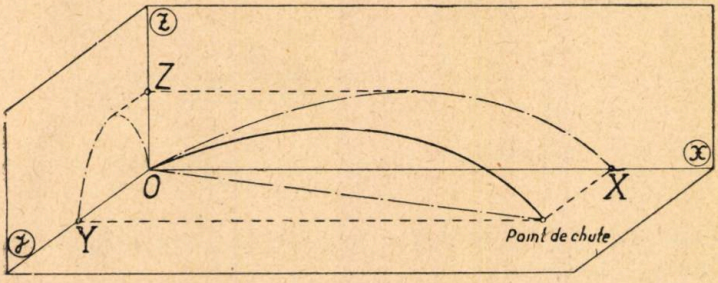


Fig. 1

X représente la portée;
Y représente la dérive;
Z représente la côte maxima.

La projéction du projéctile sur le plan zOx (fig. 2).

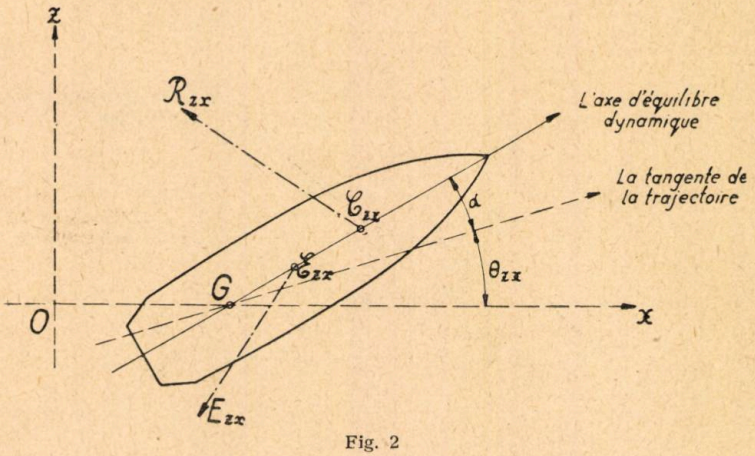


Fig. 2

R, représente la résistence aérodynamique;
E, représente l'effet MAGNUS;

G, le centre de gravité;

C, le cetre de préssion aérodynamique;

E, le centre de l'effet MAGNUS;

θ, l'inclinaisón de la tangente;

α, l'angle de déviation en hauteur de l'axe d'équilibre dynamique du projéctile;

$$(1)\quad \begin{cases} R_{zx} = \dfrac{R}{\sqrt{1 + tq^2\,\beta.\,\cos^2.\,(\alpha+\theta)}} \\ GC_{zx} = \dfrac{\overline{GC}}{\sqrt{1 + tq^2\,\beta.\,\cos^2.\,(\alpha+\theta)}} \end{cases}$$

$$(2)\quad \theta_{zx} \cong \theta$$

$$(3)\quad \begin{cases} E_{zx} = \dfrac{E}{\sqrt{1 + tq^2\,\beta.\,\cos^2\,(\alpha+\theta)}} \\ GE_{zx} = \dfrac{\overline{GE}}{\sqrt{1 + tq^2\,\beta.\,\cos^2\,(\alpha+\theta)}} \end{cases}$$

β étant l'angle de déviation latérale de l'axe d'équilibre dynamique du projéctile.

Les angles de R_{zx} et de E_{zx} avec l'axe de l'équilibre dynamique seront précisés plus tard.

La projéction du projectile sur le plan yOx (fig. 3).

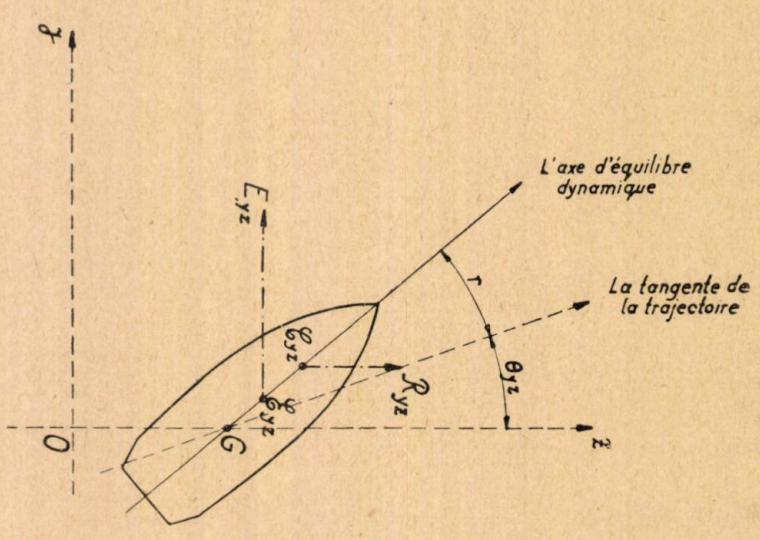


Fig. 3

Ayant:

$$(4)\quad \begin{cases} R_{yx} = R.\cos(\rho - \alpha - \theta) \\ GC_{yx} = GC.\cos(\alpha + \theta) \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} E_{yx} \cong E \\ GE_{yx} = GE.\cos(\alpha + \theta) \end{cases}$$

(6) $\theta_{yx} = \delta$ (la dérive angulaire) et où σ signifie l'angle de R avec l'axe d'équilibre dynamique.

La projection du projectile sur le plan yOz (fig. 4).

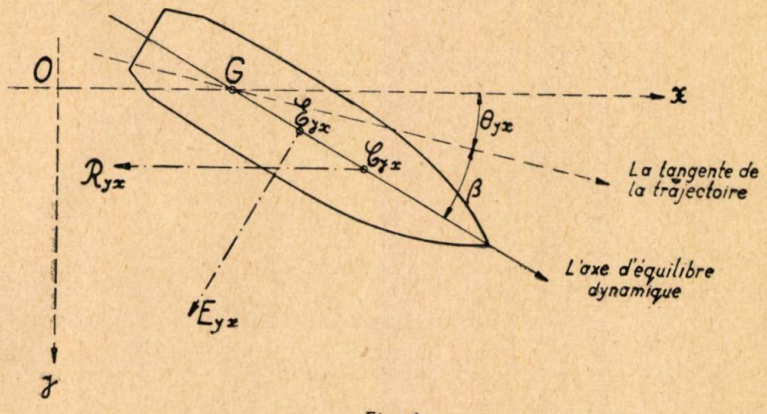


Fig. 4

Ayant:

$$(7)\quad \begin{cases} R_{yz} = R.\sin(\rho - \alpha - \theta) \\ GC_{yz} = GC.\sin(\alpha + \theta) \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} E_{yz} \cong E \\ GE_{yz} = GE.\sin(\alpha + \theta) \end{cases}$$

(9) $\theta_{yz} \cong 0$

étant l'angle de déviation de position.

La précession et la nutation

La précession (fig. 5) n'est autre chose que le mouvement circulaire du point avant du projectile, autour du cercle du cône de révolution *AGB* (fig. 5).

Le *déplacement angulaire de la précession est* ψ, donc la vitesse de précession sera $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$.

Ce mouvement est marqué sur le cercle antérieur décrit par le point avant du projectile, ayant comme centre *O'*, et comme dia-

mètre *AB*, qui sert d'origine pour mésurer le déplacement de précession.

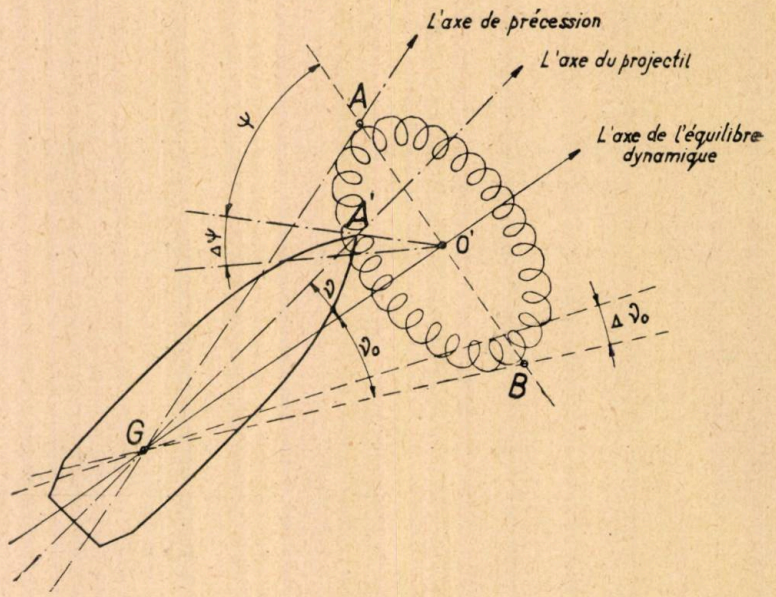


Fig. 5

La nutation (fig 5) n'est autre chose que le mouvement cônique décrit par le projectile, le cône étant *AGB*. Le démi-angle du cône:

$$\hat{AGO'} = \hat{BGO'} = \partial_0$$

porte le nom de *déplacement angulaire de nutation.*

La projection de la nutation sur le plan de la figure nous permet d'écrire la rélation:

(10) $tg\ \nu = tg\ \nu_0 \cdot cos\ \psi$

ν_0 étant l'angle ∂_0 projété, dû à la précession ψ.

Sur-précession et sur-nutation (fig. 5).

Le point avant du projectile ne décrit pas le cercle *O'*, mais une sorte de spirale plus ou moins dantelée, qui entraîne une variation $\Delta\psi$ de précession et $\Delta\partial$ de nutation.

Remarque

Il est fort possible que le projectile ait aussi un petit mouvement de réculement et d'avancement, c'est-à-dire une sorte de variation de vitesse ΔV tangentielle, en dehors de son accélération

Le mouvement du centre de gravité

Soient: R_l la *résistence aérodynamique longitudinale*, c'est-à-dire le long de l'axe du proejctile R_t la *résistence transversale*, alors:

$$(11)\quad \begin{cases} R_l = R.\cos\rho \\ R_t = R.\sin\rho \end{cases}$$

Les équations du mouvement seront:

$$(12)\quad \begin{cases} -m.\dfrac{d^2x}{dt^2} = R_l.\cos(\nu+\alpha+\theta) + R_t.\sin(\nu+\alpha+\theta).\cos\psi + \\ \qquad\qquad + E.\sin\beta.\sin\psi.\cos(\partial+\alpha+\theta) \\ -m.\dfrac{d^2y}{dt^2} = R_t.\cos\beta.\sin\psi - E.\cos\beta.\cos\psi \\ -m.\dfrac{d^2z}{dt^2} = R_l.\sin(\partial+\alpha+\theta) - R_t.\cos(\partial+\alpha+\theta).\cos\psi - \\ \qquad\qquad - E.\cos(\partial+\alpha+\theta).\cos\gamma + m\,g. \end{cases}$$

Et on doit tenir compte que:

$$(13)\quad \cos(\alpha+\theta) + \cos\beta + \cos\gamma = 1$$

La résistence aérodynamique R a, dans la Balistique Extérieure, l'expression:

$$(14)\quad R = m.c.\,F(V)$$

et dans l'Aérodynamique:

$$(15)\quad R = \frac{1}{2}\rho.\,C.\,S.\,V^2$$

c, étant le coéfficient balistique, $F(V)$ une fonction de vitesse déterminée expérimentalement, ϱ la masse spécifique de l'air, C le coéfficient aérodynamique de résistence à l'avancement, déterminé expérimentalement, S la section ortogonale opposée par le projectile.

La rélation d'équivalence entre ces deux expréssions est:

$$(16)\quad i.\frac{F(V)}{V^2} = \frac{\pi}{8}.\,C$$

i étant le coéfficient de forme établi par la Balistique.

L'effet Magnus E doit être établi par voie d'expérience au tunnel aérodynamique.

Le mouvement autour du centre de gravité

Il est commode d'utiliser les angles d'Euler, pour définir la position d'un solide mobile autour d'un point G (le centre de gravité du projectile), que nous allons considérer fixe.

Soit $Oxyz$ un trièdre de référence fixe (fig. 1) et soit $Ox_1y_1z_1$ un trièdre invariablement lié au solide. Alors, dans le cas d'un projectile, c'est-à-dire d'un solide de révolution, nous allons supposer:

Ox_1 = l'axe de l'équilibre dynamique

Oy_1 = l'axe latérale

Oz_1 = l'axe des côtes.

La rotation de l'axe Oz_1 sera la *précession* (axe $\overline{A\,O'}$ de la figure 5); la rotation de l'axe Ox_1 sera la *nutation* (l'axe du projectile); la rotation de l'axe Ox_1 sera la rotation propre ou *l'azimut.*

Soient maintenant:

p, q, r, les rotations instantanées du solide;

W l'extrémité du moment cinématique en G;

L, M. N, les projections des moments des forces extérieures.

Alors les équations du mouvement seront:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{dw_x}{dt} + q.\,w_z - r.\,w = L_y \\ \dfrac{dw_y}{dt} + r.\,w_x - p.\,w_z = M \\ \dfrac{dw_z}{dt} + p.\,w_y - q.\,w_x = N \end{cases}$$

Si on prend pour axe de référence les axes $Ox_1y_1z_1$, alors:

$$w_x = I_t\ q;\ w_y = I_t.\,p;\ w_z = I_l.\,r$$

et les équations s'écrivent:

$$(18)\quad \begin{cases} p.\,r.\,(I_t - I_l) + I_t.\dfrac{dq}{dt} = M \\ -q.\,r.\,(I_t - I_l) + I_t.\dfrac{dq}{dt} = L \\ I_l.\dfrac{dr}{dt} = N \end{cases}$$

avec:

I_l le moment d'inertie longitudinal du projectile;

I_t le moment d'inertie transversale (équatoriale) du projectile.

Mais dans le cas d'un projectile nous allons reprendre le problème des équations du mouvement autour du centre de gravité.

En effet, soient les rotations instantannées:

p, du plan z_1Ox_1 autour de l'aie Oy_1;
q, » y_1Ox_1 » Oz_1;
r, » z_1Oy_1 » Ox_1;

M, le moment aérodynamique dû a R, qu'on peut décomposer en M_{zx}, M_{yx};

H, le moment des frottements opposé à M (les frottements de l'air), avec les componentes: H_{zx} et H_{yx};

L, le moment dû à l'effet MAGNUS, avec les components: Lzx et L_{yx};

III, le moment des frottements dû à la rotation de précession.

De même, pendant son mouvement compliqué, le projectile prenda une autre forme, ainsi qu'on le voit sur la figure 6, c'est-à-dire une autre forme de pseudo-révolution.

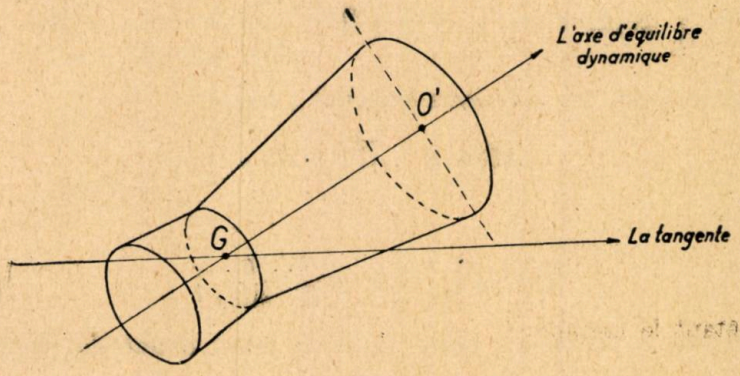


Fig. 6

Par conséquence, les moments d'inertie seront:

$$(19)\quad \begin{cases} I_t' \cong I_t + m_1.\left(\frac{1}{2}\, l_1 \sin \vartheta_0\right)^2 \\ \qquad\qquad + m_2.\left[\frac{1}{2}(l_1 + l_2)\sin\vartheta_0\right]^2 \\ I_t' \cong I_t \end{cases}$$

avec les notations de la figure 7.

La partie hachurée est supposée symétrique, les deux masses étant m_1 et m_2.

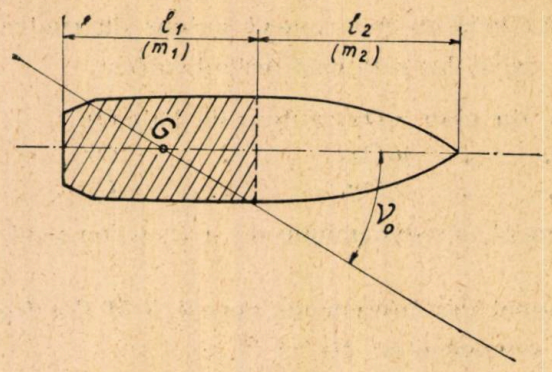


Fig. 7

On peut, avec une petite approximation, prendre

$$(19\text{ bis})\quad I'_l \cong I_l + \frac{1}{9}\, m.\, l^2.\, \sin \nu_0 \text{ et } I'_t \cong I_t$$

Alors les équations 18) deviendront:

$$(20)\quad \begin{cases} p.\,[-I'_l \cdot r + I'_t \cdot (r - \varphi')] + I_t \cdot y' = M_{zx} - H_{zx} \\ y.\,[I'_l \cdot r - I'_t \cdot (r - \varphi')] + I'_t \cdot p' = -L_{zx} + H_{zx} \\ I'_l \cdot r' = -N - \pi \end{cases}$$

Les valeurs des moments peuvent s'écrire:

$$M = R\ .\ \overline{GC}\ .\ \sin \rho$$

avec:

$$\overline{GC} = l_a\ \cdot \left(1 - \frac{m\,.\,q\,.}{R\,.\,\sin \rho}\right)$$

l_a étant la distance entre G et le point avant du projectile. Donc:

$$(21)\quad M = (R\,.\,i\rho - \sin\,.\,g)\,.\,l_a$$

Et puis:

$$(22)\quad H = \frac{1}{2}\,.\,\rho\,.\,C_f\,.\,S.\left[\frac{1}{2}\,.\,l_1 + \frac{1}{2}(l_1 + l_1)\right].\left[\frac{d\,(\vartheta + \theta)}{dt}\right]^2 \cdot \overline{GC},$$

ayant probablement $G\vartheta'$ égal ou un peu plus petit que $G\vartheta$; Cf un coéfficient de frottement de la surface; $S \cong \varepsilon.a.l$ avec $0{,}6 < \varepsilon < 1$ la surface latérale du projectile.

(23) $L = E \cdot \overline{GC}$

avec:

(24) $\begin{cases} E \cong k \cdot \rho \cdot a \cdot \omega', \ V \cdot l \cdot \sin \partial_0 \\ \overline{GE} \cong l_1 \end{cases}$

K étant un coéfficient qui dépend de la forme d'ensemble du projectile

Et puis:

(25) $N = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_f \cdot l \cdot \xi \cdot \left(\omega' \cdot \frac{a}{2}\right)^2 \cdot a$

ξ étant paramétre qui dépend de la forme prise par le projectile, a le calibre, ω' la vitesse angulaire de rotation propre.

Expériences à faire au tunnel aérodynamique.

Plus haut nous nous sommes éfforcés à définir le problème de la *Balistique Extérieure*, tel que nous le croyons le plus près de la réalité des choses.

Mais pour aboutir aux résultats pratiques, il faut entreprendre nombre d'expériences, surtout au tunnel aérodynamique.

Voilà quelques expériences que nous proposons:

1) L'étude de la résistance aérodynamique d'une maquette de projectile et surtout les valeurs de C_x et de C_z.

2) L'étude du coéfficient C_m et de la courbe métacentrique.

3) La courbe des préssions sur le corps d'un projectile.

4) La résistance transversale d'un projectile qui tourne autour de son axe longitudinale.

5) L'étude de l'effet MAGNUS.

6) L'étude des résistances aérodynamiques sur une maquette de projectile qui tourne obliquement.

7) L'étude des effets de précession et de nutation.

8) L'étude des résistances aérodynamiques sur une maquette oscillante.

9) L'étude des frottements superficiels de la surface d'un projectile réel.

10) L'étude, dans un tunnel hypersonique du coéfficient:

$$C_x = \frac{\delta}{\pi} . i . \frac{F(v)}{V^4}$$

CONCLUSIONS

Nous avons établi les équations du problème de la **Balistique Extérieure** et nous avons proposé un programme d'expériences à suivre.

Nous croyons possible d'entreprendre ces expériences à l'Ecole Polytechnique de Bucarest, dans nos laboratoires d'aérodynamique, aidé par les élèves de la Section d'Armement.

629.13 CONSTRUCTION AÉRONAUTIQUES

LE CALCUL DES LONGERONS D'AILE D'AVION CONFECTIONNÉS EN BOIS DE SAPIN (*ÉPICEA*)

par **Ing. Gr. Zamfirescu**

Cet étude comprend un examen minutieux des deux méthodes couramment employées pour le calcul des longerons en bois des ailes d'avions.

Ces méthodes sont:

— La méthode „FOREST PRODUCTS LABORATORY".

— La méthode „PRAGER".

L'auteur essaie d'établir une comparaison entre les deux méthodes de calcul et à examiner les avantages obtenus par l'épaississement de la semelle comprimée du longeron.

Dans la partie finale de l'étude l'auteur propose une méthode graphique expéditive pour dimensionner les longerons en bois sollicités à la flexion.

Sans doute, l'élément de résistance le plus important d'un avion c'est le longeron de l'aile.

Le bois a été considéré longtemps, comme le seul matériel indiqué pour la confection des longerons et, aujourd'hui aussi, il est encore beaucoup utilisé dans ce but, sur une echelle assez importante.

Les essences ligneuses qui correspondent dans les meilleurs conditions à ce but sont: le spruce, comme matériel éxotique et le faux sapin comme matériel indigène de Roumanie.

Le calcul de résistance pour les longerons en bois, sollicités généralement aux efforts de flexion simple ou flexion combinée avec compression (la flexion avec tension est moins dangereuse), est compliqué par le fait que le bois travaille dans des conditions de beaucoup moins favorables à la compression qu'à la traction et, de plus, le calcul des avions étant poussé jusqu'à la rupture, les lois connues de la résistance des matériaux ne peuvent plus être appliquées.

Parmi les méthodes préconisées jusqu'aujourd'hui pour le calcul des longerons en bois, il faut mentionner deux qui sont les plus appliquées:

1. La méthode „*Forest Products Laboratory*" et
2. La méthode „*Prager*".

Par cet étude, on poursuit:

1⁰. D'établir une comparaison entre ces deux méthodes, en déterminant les caractéristiques des sections pour lesquelles les deux méthodes conduisent à des résultats identiques ou comparables;

2⁰. D'éxaminer les avantages qu'on peut obtenir par l'épaississement de la semelle comprimée et l'amincissement de la semelle tendue de la section du longeron et

3⁰. De proposer une méthode graphique expéditive pour dimensionner les longerons en faux sapin (épicéa), sollicités à la flexion simple.

On commencera par l'analyse des deux méthodes mentionnées plus haut.

La méthode „FOREST PRODUCTS LABORATORY".

Cette méthode nous fournit (fig. 1) une serie de courbes, avec lesquelles on obtient les efforts unitaires admissibles pour les longerons en spruce (que nous allons les appliquer aussi sans autre modification au faux sapin), sollicités aux efforts de flexion simple ou de flexion combinnée avec compression.

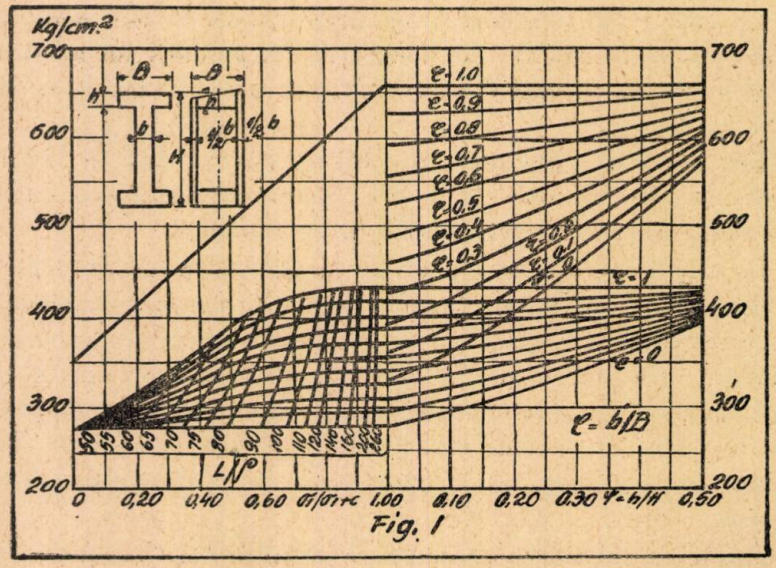


Fig. 1

En analysant ce graphique, on constate que les efforts unitaires admissibles varient avec:

1. La caractéristique de la sollicitation, c'est-à-dire avec le rapport σ_i/σ_{i+c} où:

σ_i = l'effort unitaire à la flexion dans la section considérée,

σ_{i+c} = l'effort unitaire total dans la section considérée. (flexion + compression).

2. Les caractéristiques de la section, c'est-à-dire avec les rapports $\psi = h/H$ et $\varphi = b/B$, où (fig. 2):

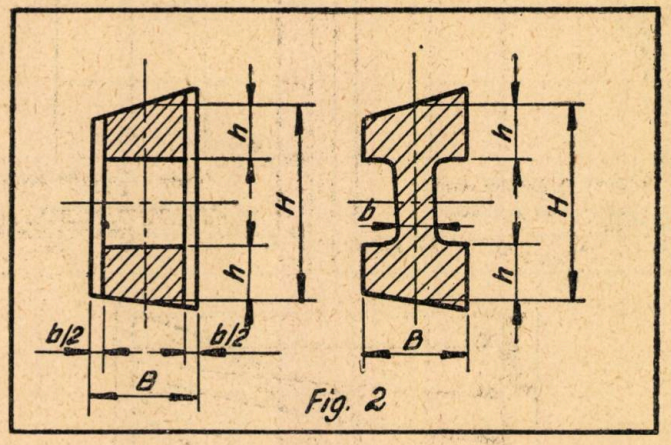


Fig. 2

H = la hauteur du longeron,

B = la largeur du longeron,

h = la hauteur de la semelle,

b = l'épaisseur de l'âme.

3. La position de la section considérée sur l'envergure du longeron, c'est-à-dire avec le rapport L/ϱ, où:

L = le double de la distance de la section considérée, jusqu'au plus proche point de moment nul.

ϱ = le rayon de giration de la section.

Dans le cas du longeron sollicité seulement à la flexion, c'est-à-dire pour le rapport σ_i/σ_{i+c} égal à l'unité, l'effort admissible dans une section quelconque ne varie pas avec la position de cette section sur la longueur du longeron, mais seulement avec ses caractéristiques ψ et φ.

En utilisant les données du graphique fig. 1, on a tracé, dans les graphiques 3, 4 et 5 (lignes fortes), la variation de l'effort unitaire admissible pour la section du longeron sollicité à la flexion simple, en fonction des deux paramètres specifiés plus haut.

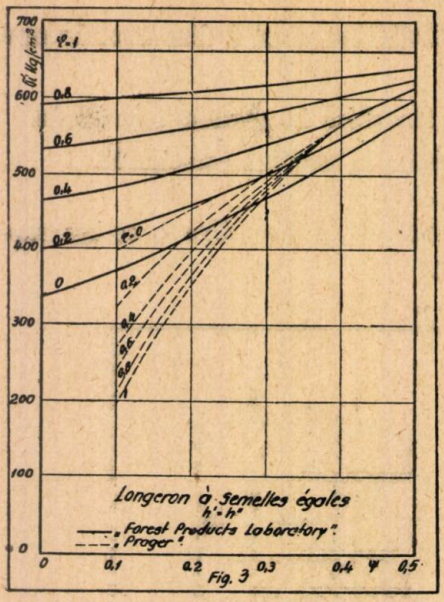


Fig. 3

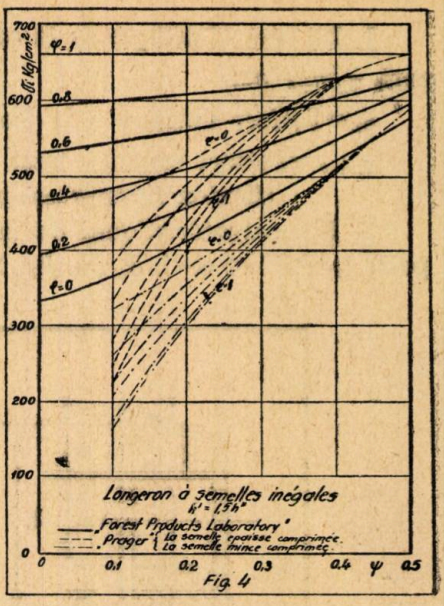


Fig. 4

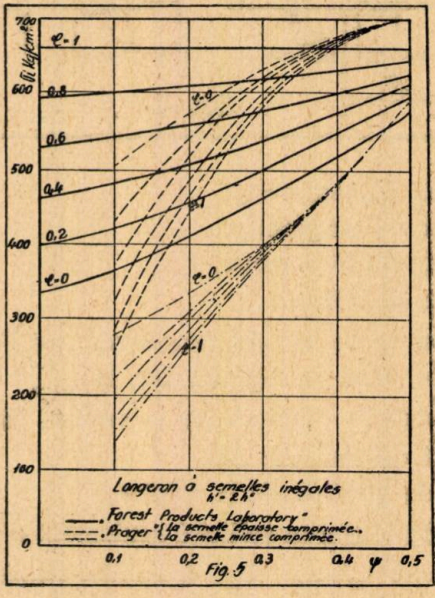


Fig. 5

La méthode „PRAGER"

Cette méthode nous fournit, pour le dimensionnement des longerons en faux sapin sollicités à la flexion simple, une serie de relations établies dans l'hypotèse que l'âme du longeron ne travaille pas à cette sollicitation et que, par suite, le moment de flexion ad-

missible ne varie pas, suivant cette méthode, qu'avec la hauteur de la semelle, c'est-à-dire avec le rapport $\psi = h/H$.

Ces relations fournisent, pour une section quelconque du longeron, la valeur du moment de flexion maximum que peut supporter cette section, tandis que la méthode, *„Forest Products Laboratory"*, nous donne les efforts unitaires admissibles.

En même temps, la première méthode ne s'occupe que du cas des longerons à semelles égales, tandis que les formules de *„Prager"* font intervenir le rapport entre les épaisseurs des deux semelles, ainsi que la nature de la sollicitation de chaque semelle, laquelle dans les différentes évolutions de l'avion, peut être tour-à-tour, comprimée ou tendue.

Les formules de *„Prager"* sont les suivantes:

$$M = \sigma_c \cdot B \cdot h \cdot (H - h) + (\sigma_t - \sigma_c) \cdot B \cdot \frac{\overline{h}^2}{6}$$

pour la section à semelles égales;

$$M' = \sigma_c \cdot B \cdot h' \left(H - \frac{h' + h''}{2}\right) + \left(\sigma_t - \frac{h'}{h''}\sigma_c\right) \cdot B \cdot \frac{\overline{h''}^2}{6}$$

pour la section à semelles inégales et avec la semelle épaisse comprimée;

$$M'' = \sigma_c \cdot B \cdot h'' \left(H - \frac{h' + h''}{2}\right) + \left(\sigma_t - \frac{h''}{h'}\sigma_c\right) \cdot B \cdot \frac{\overline{h'}^2}{6}$$

pour la section à semelles inégales et avec la semelle mince comprimée.

Dans ces formules:

σ_c = l'effort unitaire admissible à la compression,

σ_t = l'effort unitaire admissible à la traction,

B, H, h, h' et h'' ont les significations de la fig. 6.

Pour σ_c et σ_t, je prendrai les valeurs $\sigma_c = 350$ Kg/cm², et $\sigma_t = 700$ kg/cm² c'est-à-dire les mêmes valeurs que celles admises par *„Forest Products Labtratory"* dans le graphique de la fig. 1. dire les mêmes valeurs que celles admises par *„Forest Products Laboratory"* dans le graphique de la (fig. 1).

Avec les notations:

$$A = \frac{h'}{h''}; \quad h = \frac{h' + h''}{2}; \quad \psi = \frac{h}{H}$$

et puisque:

$$\sigma_t = 2\,\sigma_c$$

il en résulte:

$$h = \psi H\,;\quad h' = \frac{2\,\psi\,AH}{A+1}\,;\quad h'' = \frac{2\,\psi\,H}{A+1}$$

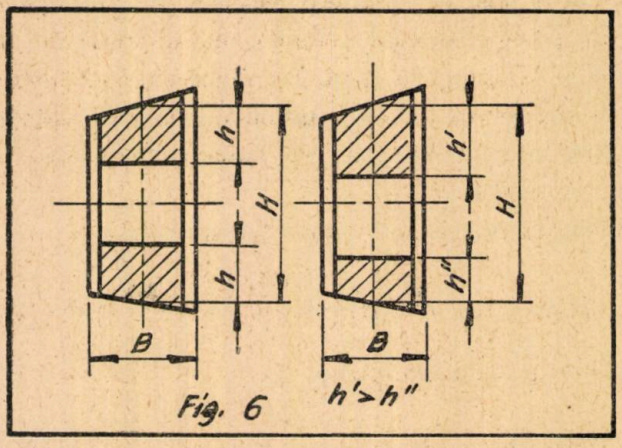


Fig. 6

et les relations de „*Prager*" prennent la forme:

$$M = \sigma_c \cdot \frac{B.\overline{H}^2}{6} \cdot \psi \cdot (6 - 5\,\psi) \cdot$$

$$M' = \sigma_c \cdot \frac{B.\overline{H}^2}{6} \cdot \frac{4\,\psi}{(A+1)^2} \cdot [\,3A\,(A+1)\,(1-\psi) + \psi\,(2-A)\,]$$

$$M'' = \sigma_c \cdot \frac{B.\overline{H}^2}{6} \cdot \frac{4\,\psi}{(A+1)^2} \cdot \left[3\,(A+1)\,(1-\psi) + \overline{A}^2 \cdot \psi \left(2 - \frac{1}{A}\right)\right]$$

ou:

$$\frac{6\,M}{B.\overline{H}^2} = \sigma_c \cdot \psi \cdot (6 - 5\,\psi)$$

$$\frac{6\,M'}{B.\overline{H}^2} = \sigma_c \cdot \frac{4\,\psi}{(A+1)^2}\,[\,3A\,(A+1)\,(1-\psi) + \psi\,(2-A)\,] \cdot$$

$$\frac{6\,M''}{B.\overline{H}^2} = \sigma_c \cdot \frac{4\,\psi}{(A+1)^2} \cdot \left[3\,(A+1)\,(1-\psi) + \overline{A}^2 \cdot \psi \left(2 - \frac{1}{A}\right)\right]$$

On à tracé, dans le graphique fig. 7 (lignes pointillées), la variation des moments flêchissants admissibles suivant „*Prager*" (M, M', M''), rapportés au moment résistant de la section pleine ($BH^2/6$), pour les valeurs suivantes du rapport A:

$A=1$; $A=1{,}5$; $A=2$ et dans les deux cas de sollicitation du longeron (semelle épaisse comprimée ou semelle mince comprimée).

Afin que les formules de „*Prager*" conduisent au mêmes dimensions que les graphiques „*Forest Products Laboratory*", pour la section pleine de longeron ($h=H/2$), la relation suivante doit être satisfaite:

$$\sigma_c \cdot B \cdot \frac{H}{2} \cdot \left(H - \frac{H}{2}\right) + (\sigma_t - \sigma_c)\frac{B}{6} \cdot \frac{\overline{H}^2}{4} = 660 \cdot \frac{B\,\overline{H}^2}{6}$$

(660 Kg./cm² étant l'effort unitaire admissible d'après „*Forest Products Laboratory*", pour la section pleine; (voir les graphiques fig. 3, 4 et 5).

De cette relation il en resulte:

$\sigma_t + 5\,\sigma_c = 2640$ Kg/cm²

c'est-à-dire, si on admet $\sigma_c = 350$ Kg/cm², il devrait que σ_t soit égal avec 890 Kg/cm², ou, si on admet $\sigma_t = 700$ Kg/cm², il devrait que σ_c soit égal à 388 Kg/cm², ce qui ne correspond pas aux qualités du matériel couramment utilisé pour la construction des longerons.

Passons maintenant à la:

Comparaison entre les deux méthodes de calcul.

Pour comparer les résultats des deux méthodes de calcul utilisées pour dimensioner les longerons en faux sapin sollicités à la flexion, on devrait:

1. Soit de déterminer les efforts unitaires fournis par les moments de flexion admissibles suivant „*Prager*" et de comparer ces efforts unitaires avec ceux admis par „*Forest Products Laboratory*" et tracés, en lignes fortes, dans les fig. 3, 4 et 5.

2. Soit de calculer les moments de flexion qui peuvent être admis suivant la méthode „*Forest products Laboratory*" et de comparer ces moments avec ceux admis par „*Prager*" et tracés en lignes pointillées dans la fig. 7.

Je procederai à l'examination des deux normes de comparaison mentionnées plus haut.

1. *Efforts unitaires admissibles d'après „Prager":*

Bien que la méthode „*Prager*" suppose que l'âme du longeron ne travaille pas à la flexion, cependant, pour que les efforts unitaires soient comparables avec les efforts de la méthode de calcul conçue

par „*Forest Products Laboratory*" (d'après laquelle l'âme du longeron travaille aussi à la flexion), il est nécessaire que les efforts des deux méthodes de calcul soient rapportès à la même section et, en effet, à la section avec âme.

De même vu que la méthode „*Forest Products Laboratory*" ne s'occupe pas du cas de la section avec semelles inégales, on assimilera, pour déterminer l'effort unitaire admissible suivant la méthode „*Prager*", la section d'en haut, avec une autre, de même largeur et hauteur *(B* et *H)*, mais avec les semelles égales entre elles et égales chaqune d'elles avec leur demi-somme, c'est-à-dire:

$$h' = h'' = h = \frac{h' + h''}{2} = \psi H$$

Le moment résistant de la section est:

$$W = \frac{B.H^2}{6} \cdot [\, 1 - (1 - \varphi)\,(1 - 2\psi)^3 \,]$$

L'effort unitaire admissible, dans les trois hypothèses des formules „*Prager*", sera donc:

$$\sigma_i^M = \frac{M}{W} = \sigma_c \cdot \frac{\psi\,(6 - 5\psi)}{1 - (1 - \varphi)\,(1 - 2\psi)^3}$$

— pour la section à semelles égales;

$$\sigma_i^{M'} = \frac{M'}{W} = \sigma_c \cdot \frac{4\psi}{(A+1)^2} \cdot \frac{3A\,(A+1)\,(1-\psi) + \psi\,(2 - A)}{1 - (1 - \varphi)\,(1 - 2\psi)^3}$$

— pour la section à semelles inégales, avec la semelle épaisse comprimée;

$$\sigma_i^{M''} = \frac{M''}{W} = \sigma_c \cdot \frac{4\psi}{(A+1)^2} \cdot \frac{3\,(A+1)\,(1-\psi) + A^2 \cdot \psi \cdot (2 - 1/A)}{1 - (1 - \varphi)\,(1 - 2\psi)^3}$$

— pour la section à semelles inégales, avec la semelle mince comprimée.

Pour les différentes valeurs du rapport entre les épaisseurs des deux semelles *(A=1; A=1,5; A=2)* et pour le cas de la semelle épaisse comprimée ou de la semelle mince comprimée, on peut tracer en lignes pointillées, dans les fig. 3, 4 et 5, la variation de l'effort unitaire admissible à la flexion suivant la méthode „*Prager*", en fonction des caractéristiques de la section ψ et φ.

2. — *Moments de flexion admissibles suivant la méthode „Forest Products Laboratory"*

Le moment de flexion admissible suivant cette méthode est égal à:

$$M = \sigma_i \cdot W = \sigma_i \cdot \frac{B.H^2}{6} \cdot \left[1 - (1 - \varphi)(1 - 2\psi)^3 \right] \text{ où:}$$

σ_i = l'effort unitaire admissible à la flexion, conformement aux courbes tracées en lignes pleines, dans les fig. 3, 4 et 5.

On a tracé dans le graphique fig. 7 (lignes pleines), la variation du rapport:

$$\frac{6M}{B.H^2} = \sigma_i \left[1 - (1 - \varphi)(1 - 2\psi)^3 \right]$$

entre le moment de flexion admissible et le moment resistant de la section pleine, en fonction des caracteristiques de la section ψ et φ.

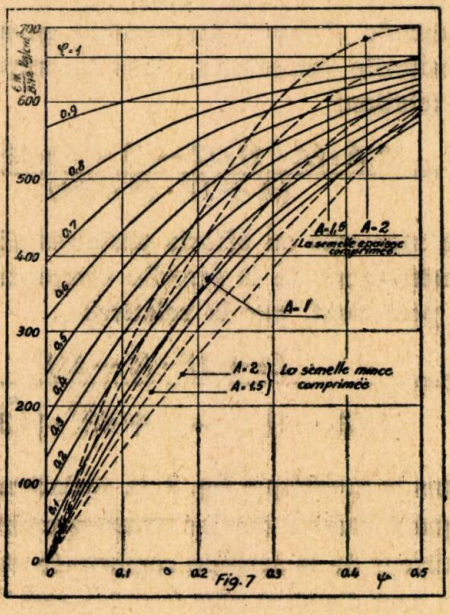


Fig. 7

Examinant les graphiques fig. 3, 4, 5 et 7, on arrive aux conclusions suivantes:

Conclusions.

1°. — Les efforts unitaires et les moments de flexion admissibles suivant la méthode „*Forest Products Laboratry*", augmentent avec ψ et φ, c'est-à-dire en même temps avec l'épaisseur des semelles ou de l'âme et ne varient pas avec le rapport A entre les épaisseurs des deux semelles.

2°. — Les efforts unitaires admissibles suivant la méthode „*Prager*" augmentent avec ψ, c'est-à-dire avec l'augmentation de l'épaisseur des semelles et diminuent avec φ c'est-à-dire avec l'épaississement de l'âme.

3°. — Les moments de flexion admissibles suivant la méthode „*Prager*" ne varient pas avec φ c'est-à-dire avec l'épaisseur de l'âme, mais augmentent avec ψ, donc avec l'augmentation de l'épaisseur des semelles.

4°. — Les différences entre les moments de flexion admissibles ou entre les efforts unitaires admissibles, suivant les deux méthodes de calcul, s'accentuent à mesure que les semelles s'amincissent et que l'âme du longeron s'épaissit.

5°. — Les moments de flexion ou les efforts unitaires admissibles suivant la méthode „*Prager*" augmentent en même temps que l'épaisseur de la semelle comprimée, dans le rapport, exprimé en pour cent, par la relation:

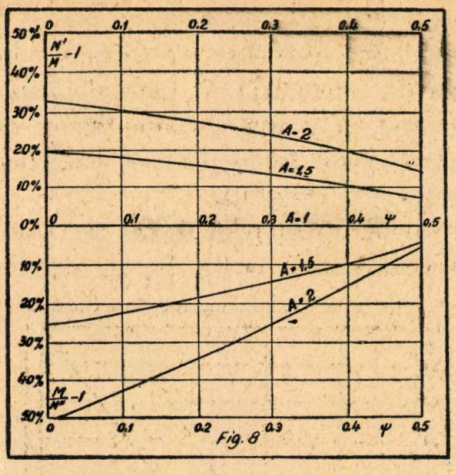
$$\frac{M'}{M} - 1 = \frac{12\,A \cdot (A+1) \cdot (1-\psi) + 4\psi \cdot (2-A)}{(A+1)^2 \cdot (6-5\psi)}.$$

De même, ces moments ou efforts unitaires admissibles diminuent avec l'amincissement de la semelle comprimée, dans le rapport exprimée en pour cent, par la relation:

$$\frac{M}{M'} - 1 = \frac{(A+1)^2 \cdot (6-5\psi)}{12\,(A+1)\,(1-\psi) + 4A^2 \cdot \psi\left(2-\frac{1}{A}\right)}$$

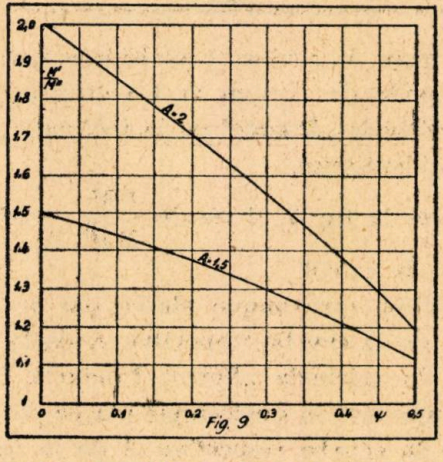
On a tracé, dans le graphique fig. 8, la variation de ces rapports

De ce graphique il resulte que les avantages obtenus par l'augmentation de l'épaisseur de la semelle comprimée et l'amincisement de celle tensionnée, sont d'autant plus grandes, que le rapport ψ, entre l'épaisseur moyenne des semelles et la hauteur du longeron, a une valeur plus réduite et que le rapport A, entre les épaisseurs des deux semelles, est plus prononcé.



6⁰. — Les moments de flexion admissibles d'après la méthode „*Prager*" varient, suivant que la semelle épaisse est comprimée ou tensionnée, dans le rapport:

$$\frac{M'}{M''} = \frac{3A\,(A+1)\,(1-\psi) + \psi\,(2-A)}{3\,(A+1)\,(1-\psi) + A^2 \cdot \psi \cdot \left(2 - \frac{1}{A}\right)}$$



On a tracé dans le graphique fig. 9, la variation de ce rapport, en fonction des caractéristiques A et ψ de la section. De ce graphique il resulte que le rapport ci-dessus,, de même que les rapports $\frac{M'}{M} - 1$ et $\frac{M}{M''} - 1$, augmentent avec A et diminuent avec ψ.

7⁰. — Les intersections des courbes représentant les efforts unitaires d'après la méthode „*Prager*" et d'après la méthode „*Eo-*

rest Products Laboratory" (fig. 3, 4 et 5), ou les intersections des courbes représentant les moments de flexion admissibles suivant les deux méthodes de calcul (fig 7) nous donnent les valeurs des paramètres ψ et φ, qui, pour une certaine valeur du rapport A, caractérisent les sections pour lesquelles ces deux méthodes de calcul nous donnent les mêmes resultats.

Pour chaque valeur du rapport A, ces sections sont placées sur une courbe qu'on a tracé dans la fig. 10, en fonction de ψ et φ.

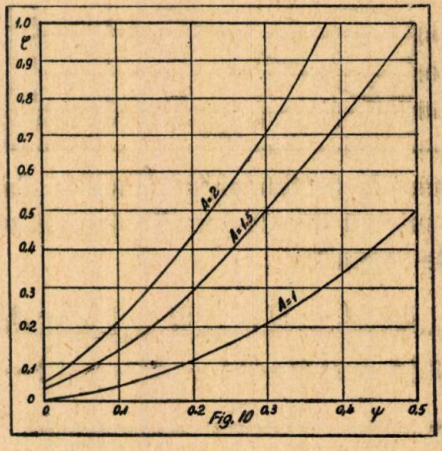


Fig. 10

Par exemple pour la section caractérisée par: $A=1,5$; $\psi=0,3$ et $\varphi=0,5$ les moments de flexion et les efforts unitaires admissibles suivant la méthode „*Prager*" ou la méthode „*Forest Products Laboratory*", sont identiques.

En effet, d'après la fig. 7, il résulte: $\frac{6M}{B.H^2}=540$ kgr/cm², pour les deux méthodes de calcul.

8°. — Une section quelconque placée par ses caracteristiques ψ et φ au-dessous de la courbe respective A de la fig. 10, est surdimensionnée par la méthode „*Forest Products Laboratry*".

Au contraire, une section quelconque placée par ses caractéristiques au-dessus de la courbe respective A de la fig. 10, est surdimensionnée par les formules de „*Prager*".

Par exemple, pour la section caractérisée par $\psi=0,3$; $\varphi=0,4$ et $A=1$, il resulte de la fig. 7:

$\frac{6M}{B.H^2}=520$ kgr/cm.² suivant la méthode „*Forest Products Laboratory*"

et $\frac{6M}{B.H^2}=475$ kg/cm.² suivant la méthode „*Prager*".

La section caractérisée par les mêmes valeurs pour ψ et φ, mais avec $A=1,5$ ou $A=2$, est, au contraire, surdimensionnée d'après la méthode „*Forest Products Laboratory*".

9⁰. — Les résultats des deux méthodes de calcul diffèrent d'autant plus entre eux, à mesure que la section, par ses caractéristiques ψ, φ et A, se trouve sur le graphique de la fig. 10, plus loin de la courbe respective A.

Pour les sections à semelle mince et âme épaisse les formules de „*Prager*" nus donnent une securité trop grande, n'étant même pas comparable avec les résultats fournis par la méthode de calcul „*Forest Products Laboratory*".

Au contraire, pour les sections à semelle épaisse et âme mince, les résultats donnés par la méthode „*Forest Products Laboratory*" nous donnent plus de securité, mais néanmoins ils restent comparables aux résultats de la méthode „*Prager*".

Par exemple, pour la section à semelle mince et âme épaisse, caractérisée par $\psi=0,1$ et $\varphi=0,8$, il résulte de la fig. 7:

— suivant la méthode „*Prager*"

$$\frac{6M'}{B.H^2} = 192 \text{ kg/cm}^2 \text{ pour } A=1$$
$$= 228 \text{ kg/cm}^2 \text{ pour } A=1,5$$
$$= 252 \text{ kg/cm}^2 \text{ pour } A=2$$

— suivant la méthode „*Forest Products Laboratory*"

$$\frac{6M}{B.H^2} = 535 \text{ kg/cm}^2.$$

Pour la section à semelle épaisse et âme mince, caractérisée par $\psi=0,45$ et $\varphi=0,1$, il résulte:

— suivant la méthode „*Prager*":

$$\frac{6M'}{B.H^2} = 590 \text{ kg/cm}^2 \text{ pour } A=1$$
$$= 630 \text{ kg/cm}^2 \text{ pour } A=1,5$$
$$= 690 \text{ kg/cm}^2 \text{ pour } A=2$$

— suivant la méthode „*Forest Products Laboratory*":

$$\frac{6M}{B.H^2} = 550 \text{ kg/cm}^2.$$

Par conséquent, comme nous avons déjà mentionné plus haut, si on dimensionne la section à semelle épaisse et âme mince, couramment utilisée dans la construction des longerons de l'aile, suivant la méthode „*Forest Products Laboratory*" on obtient des dimensions

plus larges, qui restent toutefois comparables aux résultats fournis par la méthode „*Prager*".

Procédé graphique expéditif pour dimensioner les semelles et l'âme des longerons en faux sapin.

On peut proposer une méthode graphique expéditive, servant à dimensionner les longerons en faux sapin, presque toujours sollicités dans les deux sens, aux moments de flexion de valeurs différentes et, par suite, avec les deux semelles d'épaisseurs inégales.

Dans la fig. 11, on a tracé une série de courbes, qui fournissent, suivant la méthode „*Prager*", les valeurs des rapports $\frac{6M'}{B.H^2}$ et $\frac{6M''}{B.H^2}$ en fonction des caractéristiques de la section ψ et A.

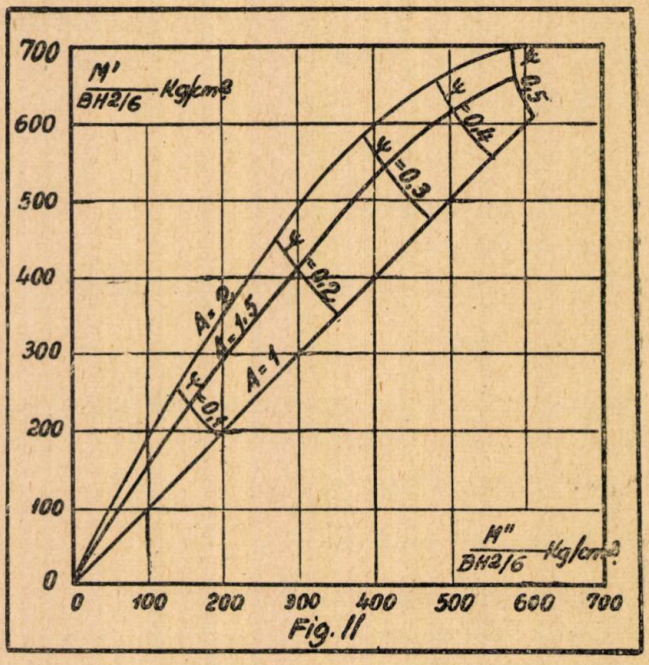


Fig. 11

Ce graphique peut être utilisé, pour dimensionner les semelles des longerons en faux sapin, sollicités à la flexion simple, de la manière suivante:

Soit une section de longeron, sollicitée par le même moment de flexion dans les deux sens et qui aura, par suite, les semelles égales entre elles.

Soit: $M' = M'' = 240\,000$ kg. cm.

B=la largeur de la section=8 cm.

H=la hauteur de la section=21 cm.

Il s'ensuit:

$$\frac{6M'}{B.H^2}=\frac{6M''}{B.H^2}=\frac{6\times 240\,000}{8\times 21^2}=408\ Kg/cm^2.$$

A l'intersection de la verticale $\frac{6M''}{B.H^2}=408$ kg/cm² avec l'horizontale $\frac{6M'}{B.H^2}=408$ kg/cm², nous obtenons la section caractérisée par: $A=1$ et $\psi=0{,}25$ et par suite: $h'=h''=\psi H=0{,}25.21=5{,}25$ cm.

Reprennons la section du longeron de l'exemple precedent, avec $B=8$ cm. et $H=21$ cm., et supposons que cette section soit sollicitée à des moments de flexion differents dans les deux sens et donc, que les semelles du longron auront des épaisseurs différentes.

Soit, $M'=240000$ Kg.cm. et $M''=170000$ Kg.cm., c'est-à-dire:

$$\frac{6M'}{B.H^2}=\frac{6\times 240\,000}{8\times 21^2}=408\ Kg/cm^2.$$

$$\frac{6M''}{B.H^2}=\frac{6\times 170\,000}{8\times 21^2}=289\ Kg/cm^2.$$

A l'intersection de la verticale $\frac{6M''}{B.H^2}=289$ Kg/cm² (fig. 11) avec l'horizontale $\frac{6M'}{B.H^2}=408$ Kg/cm², on obtient les caractéristiques suivantes de la section:

$$A=1{,}5 \text{ et } \psi=0{,}2$$

et par suite:

$$h=\psi H=0{,}2\times 21=4{,}2\ cm$$

$$h'=\frac{2\psi AH}{A+1}=\frac{2\times 0{,}2\times 1{,}5\times 21}{1{,}5+1}=5{,}04\ cm.$$

$$h''=\frac{2\psi H}{A+1}=\frac{2\times 0{,}2\times 21}{1{,}5+1}=3{,}36\ cm.$$

Par l'épaississement de la semelle comprimée de 4,2 à 5,04 cm et l'amincissement de celle tensionnée de 4,2 à 3,36 cm., nous avons

obtenu une majoration de 17% du moment de flexion admissible (voir le graphique de la fig. 8).

En effet, pour $A=1$ et $\psi=0,2$, il résulte de la fig. 7:

$$\frac{6M}{B.H^2}=350\ Kg/cm^2$$

ou

$$M=\frac{350\times 8\times 21^2}{6}=205000\ Kg.cm.$$

et par suite:

$$\frac{M'}{M}-1=\frac{240000}{205000}-1=17\%$$

Le moment de flexion admissible pour la section considerée, à semelles égales ou inégales, dimensionnée suivant la méthode „*Prager*", sera égal d'après les données fournies par la méthode „*Forest Products Laboratory*", à 240000 Kg. cm., si l'âme du longeron aura l'épaisseur qui résulte de l'utilisation du graphique fig. 10, à savoir:

$\varphi=0,16$ ou $b=\varphi$, $B=1,28$ cm., pour la section à semelles égales ($A=1$), et

$\varphi=0,3$ ou $b=\varphi$. $B=2,4$ cm. pour la section à semelles inégales ($A=1,5$).

Si l'âme du longeron est plus épaisse que 1,28 cm. (dans le cas de la section à semelles égales), ou 2,4 cm. (dans le cas de la section à semelles inégales), la section se trouve sur le graphique fig. 10, au-dessus de la courbe respective A et la section, calculée d'après la méthode de „*Prager*", est sur dimensionnée.

Mais si l'âme du longeron est plus mince, la section calculée suivant cette méthode, est sousdimensionnée, la section restant pourtant, comme nous avons déjà vu, comparable à la section trouvée suivant la méthode „*Forest Prooducts Laboratory*".

L'épaisseur de l'âme étant fonction de la force tranchante dans la section considerée, on la determine avec la formule:

$$\tau=\frac{T}{b}\cdot\frac{S}{I}\quad \text{où:}$$

T=la force tranchante dans la section considerée;

b=l'épaisseur totale de l'âme du longeron;

S=le moment statique d'une moitié de la section, par rapport à la fibre neutre;

I=le moment d'inertie de la section entière.

Avec les notations:

$$S = \frac{B.\overline{H}^2 - (B-b)\ (H-2h)^2}{8} = \frac{B.H^2}{8} \cdot \left[1 - (1-\varphi)\ (1-2\psi)^2\right]$$

et

$$I = \frac{B.\overline{H}^3 - (B-b)\ (H-2h)^3}{12} = \frac{B.\overline{H}^3}{12} \cdot \left[1 - (1-\varphi)\ (1-2\psi)^3\right]$$

il résulte:

$$\frac{T}{\mathfrak{T}.B.H} = \frac{2}{3} \cdot \varphi \cdot \frac{1 - (1-\varphi)\ (1-2\psi)^3}{1 - (1-\varphi)\ (1-2\psi)^2}$$

L'effort unitaire de cisaillement ne varie pas sensiblement avec l'augmentation de l'épaisseur d'une des semelles et l'amincissement de l'autre, ainsi que, pour dimensionner l'âme, on pourrait introduire dans le calcul, la hauteur moyenne des deux semelles et, par suite, la relation ci-dessus reste valable aussi pour le cas de la section de longeron à semelles inégales.

Dans la fig. 12, on a representé la variation du rapport $T/\mathfrak{T}BH$, en fonction de ψ et pour differents valeurs de φ.

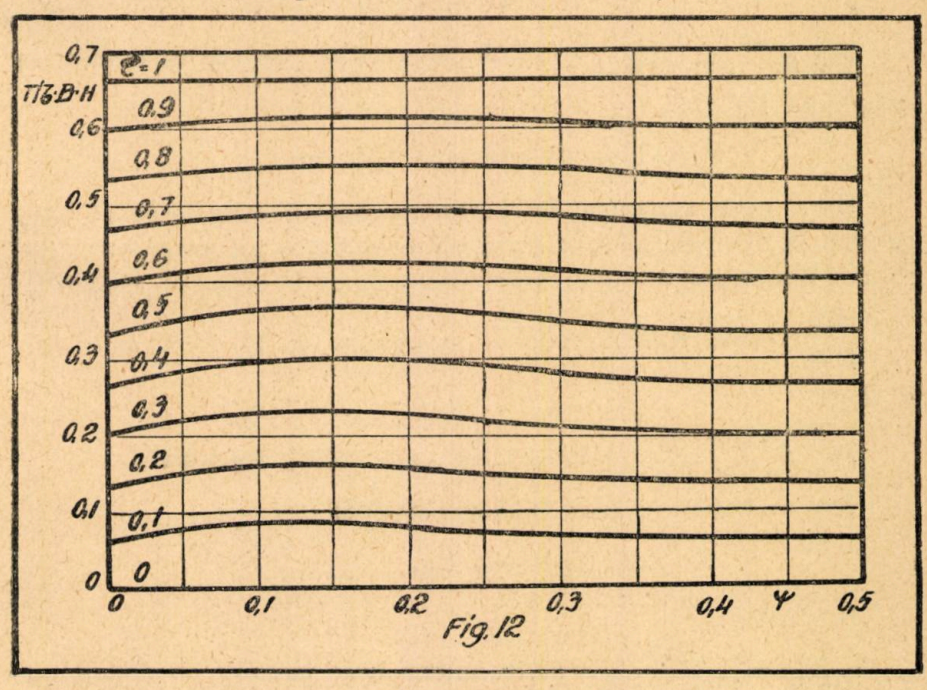


Fig. 12

En reprennant les sections de longeron des exemples precédents, caracterisées par:

$\psi = 0{,}25$; $\varphi = 0{,}16$; $A = 1$ et

$\psi = 0{,}2$; $\varphi = 0{,}3$; $A = 1{,}5$

il résulte, du graphique de la fig. 12, que les deux méthodes de calcul, conduisent à des résultats identiques, si la force tranchante a, dans les sections considerées, les valeurs qui résultent des relations:

$\frac{T}{\mathfrak{G}.B.H} = 0{,}12$, pour la section à semelles égales ($A = 1$) et

$\frac{T}{\mathfrak{G}.B.H} = 0{,}23$, pour la section à semelles inégales ($A = 1{,}5$),

Pour $\mathfrak{G} = 150$ Kg/cm², dans le cas de l'âme en contreplaqué, il résulte:

$T = 0{,}12 \times 150 \times 8 \times 21 = 3000$ Kg., dans le cas de la section à semelles égales;

$T = 0{,}23 \times 150 \times 8 \times 21 = 5800$ Kg., dans le cas de la section à semelles inégales.

Soit, pour le cas de la section à semelles égales:

$$T = 4000 \text{ Kg.} > 3000 \text{ Kg.}$$

Il résulte:

$\frac{T}{\mathfrak{G}.B.H} = \frac{4000}{150 \times 8 \times 21} = 0{,}158$ valeur avec laquelle on deduit du graphique fig. 12:

$$\varphi = 0.21 \text{ ou } b = 1{,}68 \text{ cm.} > 1{,}28 \text{ cm.}$$

Avec cette épaisseur de l'âme, la section considerée résiste, suivant la méthode „*Forest Products Laboratory*", à un moment de flexion plus grand que celui admissible suivant la méthode „*Prager*":

$\frac{6M}{B.H^2} = 440$ Kg/cm² (voir le graphique fig. 7).

et donc:

$M = \frac{44 \times 08 \times 21^2}{6} = 260000$ Kg. cm. > 240000 Kg. cm.

Soit au contraire, pour la même section:

$$T = 2000 \text{ Kg.} < 3000 \text{ Kg.}$$

Il résulte:

$\frac{T}{\mathfrak{G}.B.H} = \frac{2000}{150 \times 8 \times 21} = 0{,}079$ valeur avec laquelle on deduit du graphique fig. 12;

$$\varphi = 0{,}11 \text{ ou } b = 0{,}88 \text{ cm} < 1{,}28 \text{ cm.}$$

D'aprés le graphique fig. 7, la section résiste à un moment de flexion (suivant la méthode „*Forest Products Laboratory*") égal à:

$$M = \frac{400 \times 8 \times \overline{21}^2}{6} = 235000 \text{ Kg. cm.} < 240000 \text{ Kg. cm.}$$

En nous occupant maintenant du cas de la section à semelles inégales ($A = 1{,}5$), on peut supposer;

$$T = 6800 \text{ Kg.} > 5800 \text{ Kg.}$$

Il resulte:

$$\frac{T}{\mathfrak{C}.B.H} = \frac{6800}{150 \times 8 \times 21} = 0{,}27 \text{ et, d'aprés le graphique fig. 12;}$$

$$\varphi = 0{,}36 \text{ ou } b = 2{,}88 \text{ cm.} > 2{,}4 \text{ cm.}$$

Avec cette épaisseur de l'âme, la section considerée résiste, suivant la méthode, „*Forest Products Laboratory*", à un moment de flexion plus grand que celui admis par la méthode „*Prager*":

$$\frac{6M}{B.\overline{H}^2} = 430 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (voir le graphique fig. 7).}$$

et donc: $M = \frac{430 \times 8 \times \overline{21}^2}{6} = 252000 \text{ Kg.cm.} > 240000 \text{ Kg.cm.}$

Soit au contraire, pour la même section à semelles inégales:

$$T = 4800 \text{ Kg.} < 5800 \text{ Kg.}$$

Il résulte:

$$\frac{T}{\mathfrak{C}.B.H} = \frac{4800}{150 \times 8 \times 21} = 0{,}19 \text{ et, d'aprés le graphique fig. 12:}$$

$$\varphi = 0{,}25 \text{ ou } b = 2 \text{ cm.} < 2{,}4 \text{ cm.}$$

D'après le graphique fig. 7, la section ci-dessus résiste suivant la méthode „*Forest Products Laboratory*", à un moment de flexion égal à:

$$M = \frac{400 \times 8 \times \overline{21}^2}{6} = 235000 \text{ kg.cm.} < 240000 \text{ kg.cm.}$$

En résumé, connaissant les moments de flexion qui sollicitent une section de longeron, dans les deux sens (M' et M''), la force tranchante (T), la largeur (B) et la hauteur (H) de la section on peut determiner l'épaisseur des deux semelles à l'aide du graphi-

que de la fig. 11 et l'épaisseur de l'âme, à l'aide du graphique de la fig. 12.

L'emplacement de la section (caracterisée par les paramètres déterminés plus haut A, ψ et φ) sur le graphique de la fig. 10, nous indiquera si les dimensions obtenues en appliquant les formules de „*Prager*“ sont supérieures ou inférieures aux celles qui correspondent le mieux en appliquant la méthode „*Forest Products Laboratory*“.

631.3 MACHINES AGRICOLES

DIE VERWENDUNG TIERISCHER UND MASCHINELLER ZUGKRAFT IN DER LANDWIRTSCHAFT

von **Dr. G. Drăgan**
Asistent
Facultatea de Agronomie
Şef de lucrări
Staţiunea de Incercarea Maşinilor

Die Fortschritte der Technik fanden in der Landwirtschaft ohne Verzug einen nachhaltigen Widerhall. Die Ausbreitung der Verwendung von mechanischer Zugkraft in der Landwirtschaft hielt gleichen Schritt mit der Anwendung mechanischer Zugmittel in der Transporttechnik

Die Landwirtschaft hat jedoch mit der Schaffung und Schulung eines technisch vorgebildeten Personals zu kämpfen, während die Industrie hier bereits auf gerodeten Boden stösst.

Die landwirtschaftlichen Maschinen stehen den grössten Teil des Jahres ausser Betrieb und gewöhnlich auch ohne Wartung innerhalb dieser Zeit, während die in der Industrie zur Verwendung kommenden Maschinen stetig in Betrieb sind und somit auch gewartet werden.

Die landwirtschaftlichen Arbeiten stehen in engem Zusammenhang mit den natürlichen Boden-und Klimaverhältnissen, wie auch mit dem Vegetationsrythmus. Da sie in bestimmten Perioden des Jahres, die gewöhnlich von kurzer Dauer sind, ausgeführt werden müssen, trachtet der Landwirt, sie möglichst schnell zu verrichten. Sie müssen qualitativ einwandfrei und möglichst billig durchgeführt werden, um einen möglichst hohen Reingewinn erzielen zu können, da von allen Produktionszweigen die Landwirtschaft im allgemeinen bekanntlich das geringste Einkommen abwirft.

Zur Erlangung dieser drei Bedingungen d. h. dass die Arbeiten schnell, gut und billig ausgeführt werden können, reichen die eigenen menschlichen Kräfte nicht aus, sodass man sich verschiedener anderer tierischer und maschineller Hilfsmittel bedienen muss.

Der Mensch eignet sich infolge seiner aufrechten Haltung vor allem für Arbeiten in senkrechter Richtung und die Geräte wie

Hacke, Spaten usw. tragen diesem Umstande volle Rechnung. Die Tiere hingegen sind für wagrechte Arbeitsleistungen geeignet, gemäss der Stelung ihrer Wirbelsäule und der Pflug, die Egge, der Wagen,, usw, haben demenstprechend ihre Anpassung gefunden. Es liegt also nahe, dass sich für maschinelle Hilfsmittel (Motoren) Geräte mit drehender Bewegung eignen. Diese Schlussfolgerung ist nicht bindend, da der Motor die geradlinige Hin-und Herbewegung der Kolben als sein Grundprinzip hat und es wurden sogar Maschinen gebaut, die den Boden durch Schläge bearbeiten. Bisher ist ihre Verbreitung jedoch gering. Sowohl die tierischen wie auch die maschinellen Hilfsmittel (Motoren), die als Zugkräfte in der Landwirtschaft ihre Verwendung finden, verwandeln im allgemeinen die potentielle thermische Energie, die in den Nahrungsmitteln bzw. Brennstoffen enthalten ist.

Die Tiere sind empfindliche Motoren, die nicht ununterbrochen arbeiten können, wie es bei den toten Motoren der Fall ist. Ihre Arbeitsperioden müssen mit verhältnismässig langen Ruheperioden zwecks Nahrungsaufnahme und Rast abwechseln. Bei Verwendung von Zugtieren müssen wir berücksichtigen, dass diese nur eine gewisse Zeit arbeiten können mit einer bestimmten, individuell verschiedenen Gangart, die sogar bei demselben Individuum, je nach den Umständen verschieden sein kann, da sie von der jeweiligen Funktion des Organismus, im besonderen von der Blutzirkulation und der Atmung abhängt. Ein zu schneller oder zu langsamer Gang ermüdet schnell und die geleistete Gesamtarbeit ist geringer als diejenige, die bei einem normalen Gang erzielt wird.

Der grösste für die Landwirtschaft aufgewendete Teil an Energie wird bisher von Tieren geleistet. Der Mensch hat hier mehr die Rolle eines Leiters, da seine Arbeit viel zu teuer ist, während die toten Motore berufen sind vor allem die schweren Arbeiten zu verrichten, die weder der Mensch noch das Tier gut ausführen können.

In Rumänien kommt für die Verrichtung der landwirtschaftlichen Arbeiten dem Hornvieh, Rind und Ochsen, die grösste Bedeutung zu. Ihm folgt das Pferd; Maultiere, Esel, usw. werden nur vereinzelt verwendet.

Für schwerere Lasten, beim Abführen von Heu und Holz auf Gebirgswegen, sowie auf sumpfigen Böden eignen sich die Ochsen am besten, denn sie haben einen sicheren Gang, werden nicht unruhig, wenn ihre Füsse in den Boden einsinken und liegen fest im Joch auch wenn sie stillstehen. Das Pferd hingegen sinkt in weichem Boden tiefer ein, da sein Huf kleiner ist, es wird leicht un-

ruhig, bergauf lässt es beim Stillstand die Last nach, so dass sich bei mangelnder Aufmerksamkeit Unglücksfälle erreignen können. Bergauf und durchs Wasser wird es viel schneller schwindlig als der Ochse, sein Geschirr ist komplizierter und kostspieliger, es verwickelt sich oft in ihm und erhebt sich schwerer, wenn es gefallen ist. Bei Unglücksfällen kann das Fleisch nicht, oder nur sehr minderwertig verwertet werden. Ferner ist der Unterhalt der Pferde kostspieliger als derjenige der Ochsen und langes Stallstehen ist ihnen schädlich. Von Seuchen werden sie weniger heimgesucht als Ochsen.

Im allgemeinen ist es gut, nur so viele Pferde zu halten, als für nutzbringende Arbeit während des ganzen Jahres notwendig ist, während für die Zeit der Höchstarbeit Ochsen einzustellen sind, die leichter zu halten sind und nicht so schnell an Wert verlieren. Ja im Gegenteil steigt ihr Wert sogar, wenn sie gemästet werden und sie können dann nach verbrachter Arbeitssaison mit einem höheren Preise als dem Erstehungspreis verkauft werden.

Die Zahl und die Art der Arbeitstiere in einer Wirtschaft wird für jeden einzelnen Fall bestimmt. In den kleinen landwirtschaftlichen Betrieben ist es oft besser die Milchkühe einzuspannen, wie dies besonders in Siebenbürgen der Fall ist. Wenn eine grössere Zahl von Arbeitstagen im Laufe eines Jahres für die Tiere in Betracht kommt, ist die Verwendung von Ochsen vorzuziehen. Die Rentabilität der Haltung von Pferden steigt besonders in der Umgebung der Städte oder in waldigen Gegenden usw., wo ausser den landwirtschaftlichen Arbeiten in der freien Zeit auch Fuhrwerk betrieben wird. In den mittleren und grossen landwirtschaftlichen Betrieben, wo mehrere Arbeitstiere erforderlich sind, ist die Zahl und das Verhältnis zwischen Pferden und Ochsen von Fall zu Fall verschieden.

Zwecks Ermittlung der Gesamtzahl der in einem Betrieb notwendigen Arbeitstiere berücksichtigt man die Zeitspanne der höchsten Arbeitsanforderung im Laufe eines Jahres und zwar berechnet man die Gesamtzhal der Arbeitstage, die bei Verwendung von nur einem Paar Pferden oder Ochsen in diesem Zeitraume notwendig sind und dividiert sie durch die wahrscheinliche Anzahl der in der geforderten Arbeitsperiode notwendigen Tage womit man die erforderliche Anzahl der Paare von Arbeitstieren erhält. Ferner ist zu beachten, dass im allgemeinen vier Paar Ochsen ungefähr soviel leisten wie drei Paar Pferde.

In derselben Weise kann man auch im Falle des maschinellen

Antriebs vorgehen. Jedoch eine nutzbringende Anwendung des Traktors erfordert eine viel grössere Arbeitsfläche, oder muss dafür Vorsorge getroffen werden, dass der Traktor auch für andere Arbeiten Verwendung finden kann, damit er eine möglichst grosse Zahl von Tagen während des Jahres in Betrieb sein kann. Er kann zum Antrieb einer Pumpe, Schrotmühle, Dreschmaschine herangezogen werden, oder verschiedene Transporte verrichten. Für den letzten Fall wurden die Traktoren mit Federn und Gummibereifung versehen (Abb. 1). Die Gummireifen eignen sich zum Pflügen fast

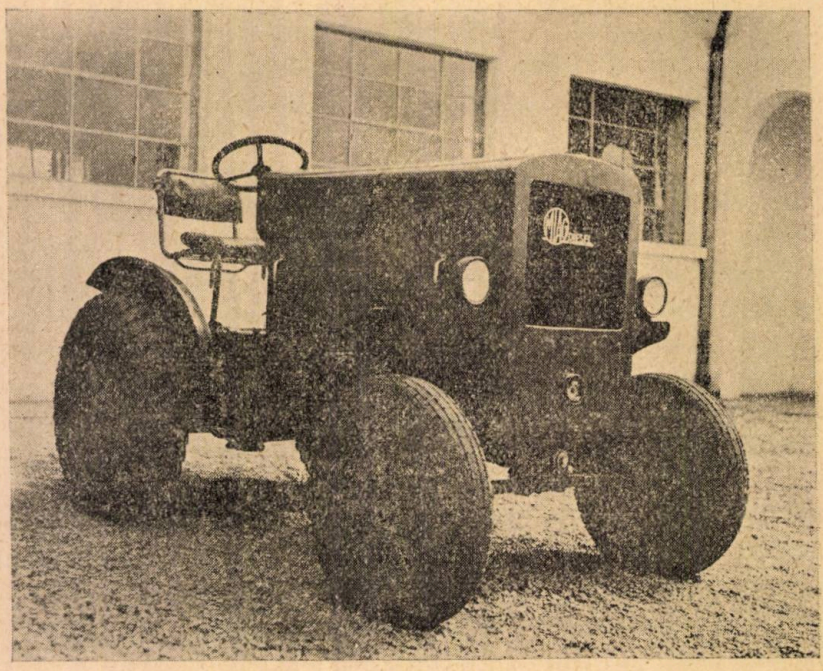


Abbildung 1. — Traktor MIAG-DIESEL Type LD 20, gefedert auf Gummirädern, gleignet sowohl für Landwirtschaliche Arbeiten als auch für Transport. Bei Geschwindigkeit I: Zug am Hacken 848 kg, Geschwindigkeit 0,79 m/Sek. Zugkraft am Hacken 8,93 PS, mittlerer Querschnitt der Furche 18 cm × 69 cm; Bei Geschwindigkeit II: Zug am Hacken 264 kg, Geschwindigkeit 1,46 m/Sek, Zugkraft am Hacken 4,79 PS, mittler Querschnitt der Furche 18 cm × 63 cm.

Bremskraft 16,97 PS, minimaler Verbrauch 219 g Treiböl pro PS/Stunde (Bei der Maschinenprüfungsstation erhaltene Ergebnisse).

ebenso gut wie die „Bereifung mit Winkelgreifer". Sie haben jedoch den Nachteil, dass sie viel kostspieliger sind und auf feuchten Böden leichter gleiten, was ich bei den vergleichenden Versuchen mit dem Traktor Deutz von 28 PS, der nacheinander mit Winkel-

greifern und mit Gummibereifung erprobt wurde, feststellen konnte.

Die in der Landwirtschaft verwendeten Traktoren sind:

1) *Feststehende Traktoren* (Abbildung 2), die am Rande des Feldes aufgestellt den Pflug mittels eines um eine Trommel ge-

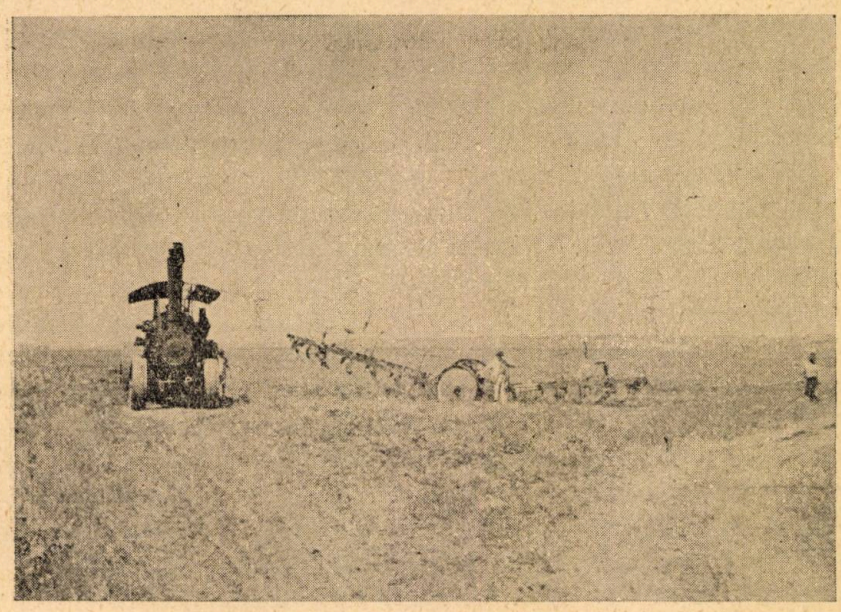


Abbildung 2. — Seiltraktor FOWLER der Farm Chirnogi der „Eforia Spitalelor Civile".

wickelten Seiles ziehen. Sie fanden ihre Verwendung bei Beginn der sogenannten „Motokultur", als die Explosionsmotoren noch unbekannt waren. Sie sind grosse und schwere Konstruktionen, gemäss den Anforderungen eines Dampfgenerators im allgemeinen und können nicht über einen lockeren Boden hinwegfahren, da sie ihn zu sehr zusammendrücken und zu viel Energie für ihre Fortbewegung verbrauchen würden.

Die feststehenden Traktoren stellen die Anpassung der Dampfmotore an die Landwirtschaft dar. Eine Menge von Unzulänglichkeiten, die mitunter grösser sind als die Vorteile, haften ihnen an. Nach dem Auftreten der Explosionsmotoren wurden die feststehenden Dampftraktoren allmählich beseitigt und heute sind sie fast schon in das Gebiet der Geschichte übergegangen. Auch unsere Grossgrundbesitzer, die sich bereits vor einigen Jahrzehnten Fowler-Pfluggarnituren angeschafft hatten, haben sie in den meisten

Fällen ausser Betrieb gesetzt, obwohl dieselben noch gebrauchsfähig gewesen wären. Um sie in Betrieb zu setzen, benötigt man 2—3 Stunden Vorbereitung, während die Explosionsmotoren in einigen Minuten anlaufen. Bei Ausserbetriebsetzung haben die Dampfmotoren, infolge Abkühlung des Speisewassers einen erheblichen Energieverlust zu verzeichnen, der bei Explosionsmotoren fast vernachlässigt werden kann. Das Kesselspeisewasser aus denselben kann jedoch zum Waschen, Baden der Arbeiter, usw. Verwendung finden. Die feststehenden Traktoren benötigen ausserdem grössere und kostpieligere Hilfseinrichtungen und ein zahlreiches Personal zur Inbetriebsetzung.

Trotzalldem besitzen die Dampfmotoren ausser obigen Nachteilen auch bedeutende Vorteile: sie sind viel elastischer als Explosionsmotoren, infolge der Möglichkeit einer längeren Einströmperiode des Dampfes, wobei der Druck im Zylinder fast der Kesselspannung gleich kommt, wobei für eine kurze Zeit eine viel grössere Kraftabgabe erzielt werden kann als die, für welche dieselben gebaut wurden, was insbesondere beim Tiefackern von nicht homogenen, feuchten und wurzeligen Boden von Bedeutung ist. Die Explosionsmotoren sind im Gegensatze dazu bedeutend weniger elastisch, da sie bei voller oder fast voller Oeffnung der Vergaserklappe ihre Höchstleistung hergeben müssen. Da die eingeführte Brennstoffmenge durch das Volumen der Explosionskammer beschränkt ist, kann die Konstruktionsgrenze nur durch Einführung eines reichhaltigeren Explosionsgemisches überschritten werden. Auf diese Weise findet jedoch keine vollkommene Verbrennung mehr statt, da infolge des Fehlens der nötigen Zusatzluft der Motor Rauchentwickelung im Auspuff zeigt, was gleichbedeutend mit einer Brennstoffverschwendung ist.

Die Dampfmotoren besitzen ferner, dank ihrer Betriebsart eine bedeutend grössere Lebensdauer als Explosionsmotoren.

Bei Dampfmotoren kann man einen billigen Brennstoff verwenden: Stroh, Holz, usw., über die der Landwirt reichlich verfügt, während die Explosionsmotoren speziell destillierte Brennstoffe benötigen, die kostspieliger und nicht überall vorhanden sind. Die Dampfmotoren sind anspruchsloser als Explosionsmotoren, einfacher, leichter zu bedienen usw.

2) *Motorpflüge* (Abbildung 3) bei denen der Traktor und der Pflug auf gemeinsamen Rahmen aufgebaut sind als ein unteilbares Ganze. Diese Pflüge sind trotz einiger Vorteile wie einfache und gedrungene Bauart, leichter Rückwärtsgang, grössere Leistung als

selbstständige Traktoren usw. fast gänzlich ausser Gebrauch gekommen, da die selbstständigen Traktoren eine vielfachere Verwendungsmöglichkeit bieten: beim Pflügen, Säen, Hacken, beim Transport von Waren, zum Antrieb mittels Riemen verschiedenartiger

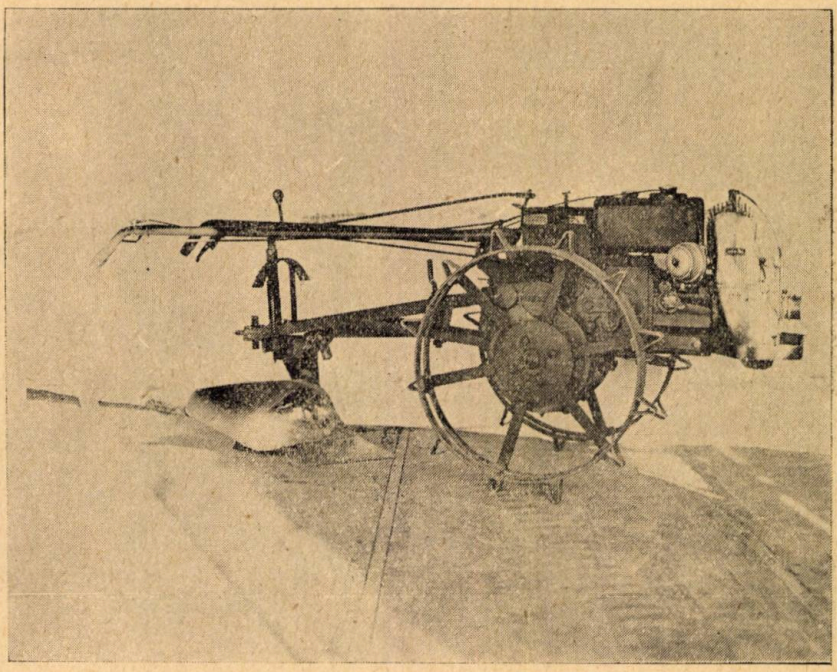


Abbildung 3. — Motorpflug HOLDER, einachsig.

landwirtschaftlicher Maschinen usw. Die Motorpflüge sind mit Explosionsmotoren ausgerüstet und auf zwei oder vier Rädern gelagert.

3) *Die selbstständigen Traktoren* (Auto-Traktoren, Abbildung 1 und 4), die den Pflug oder andere Fahrzeuge hinter sich herziehen ebenso wie Tiere. Diese Traktoren besitzen jedoch nicht nur Vorteile, sondern weisen auch bedeutende Nachteile auf und zwar: Die am Zughacken zur Verfügung stehende Kraft beträgt nur cca. 50% von der des Motors während bei dem so teueren Brennstoff circa 50% für die Eigenfortbewegung des Traktors zur Verwendung gelangen. Ferner pressen sie durch ihr verhältnismässig grosses Gewicht bei wiederholtem Ueberfahren den Boden so fest, dass ein gleitloser Radeingriff nicht mehr möglich wird, was natürlich mit Energieverlusten verbunden ist.

Im heutigen gangbaren Sprachgebrauch verstehen wir unter

Traktoren die mit Explosionsmotor versehenen Selbstfahrer. Dieselben können mit gewöhnlichen Greifrädern versehen oder als Rau-

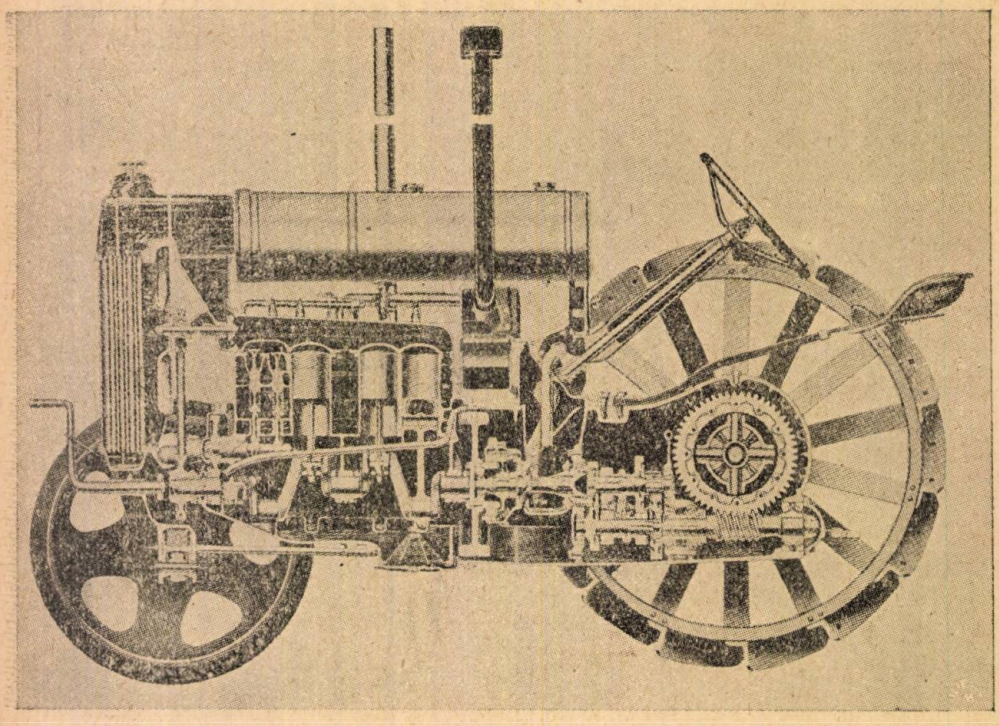


Abbildung 4. — Traktor FORDSON 15/30 PS, zweiachsig mit Greifrädern, Zylinderkopf wie Vergaser sowohl für Schwerbenzin als auch für Petroleum geeignet.

Schwerbenzinbetrieb: Höchste Bremskraft 30,20 PS bei einem Brennstoffverbrauch von 317 g/PS-Stunde, der dem minimalen Verbrach entspricht.

Mit Petroleum. Maximale Bremskraft 22,80 PS mit einem Verbrauch von 368 gr/PS-Stunde. De minimale Verbrauch ist 358 g/PS-Stunde bei 22,01 PS. Die Höchsttemperatur des Wassers im Kühler war 90° C.

Bei der Arbeit auf dem Felde: bei Geschwindigkeit I: 1,31 m/Sek. und 640 kg am Zughacken resp. 11,21 PS, bei mittlerem Ackern von 22,7 cm. × 60 cm. bei einem Stundenverbrauch von 8,80 1 Petroleum für eine Fläche von 2862 m² oder 30,76 1 Petroleum pro ha bei einem spezifischen Widerstand von 33,10 kg/dm².

Bei Geschwindigkeit II: 1,63 m/Sek. und 505 kg am Zughacken oder 10,77 PS, mitteltiefes Ackern 17,5 cm Tiefe, Verbrauch. 9.10 1 Petroleum pro Stunde für ein Fläche von 3424 m² resp. 26 60 l Petroleum pro ha bei einem spezifischen Widerstand von 36.36 kg/dm². Verbrauch pro 1000 m³ Sturzerde 15,20 1 Petroleum. (Bei der Maschinenprüfungstatiosn erhaltene Ergebnisse).

penschlepper ausgebildet sein (Abbildung 5). Bei letzteren ist die Gleitmöglichkeit minimal, während die am Zughaken zur Verfügung stehende Kraft grösser als bei den ersten ist, vorausgesetzt, dass jeder von ihnen mit gleich starken Motoren versehen ist. Die

Raupenschlepper können sogar auf unebenem, gefährdetem wie feuchtem Gelände fahren.

Die Grösse des Traktors hängt von dem Ausmasse des Betriebes ab, der ihn verwendet, jedoch soll er nicht zu schwer sein, da er dann den Boden zu sehr festdrückt, er soll aber auch nicht zu klein sein, da er sonst seine wichtigsten Vorteile verliert. Vom Trak-

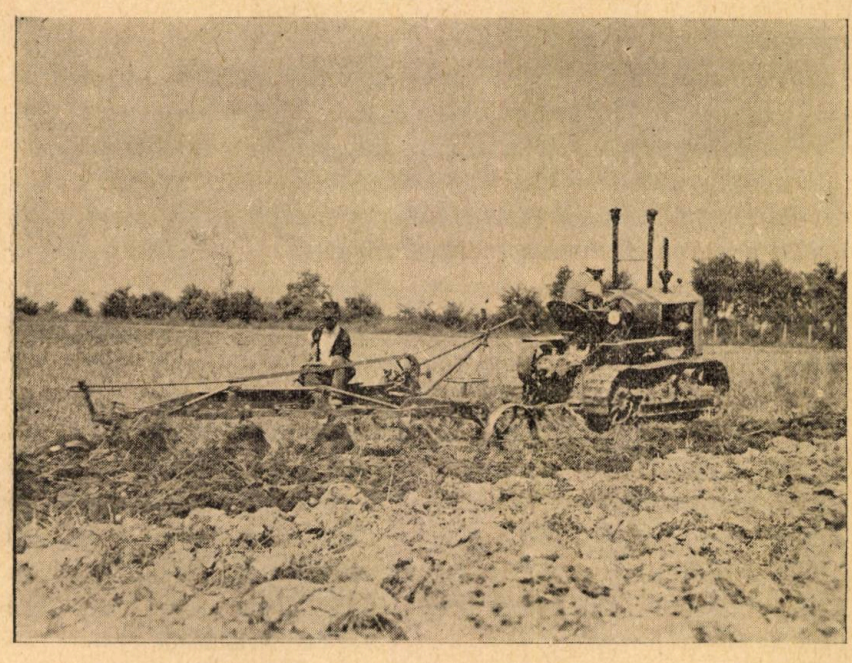


Abbildung 5. — Landwirtschaftlicher HANOMAG-DIESEL Raupenschlepper. An der Motorwelle 50 PS indizierte Kraft, an der Bremsscheibe 42,5 PS, am Zughackn 25,25 PS bei Geschwindigkeit I und 32,30 PS bei Geschwindigkeit II; bei Geschwindigkeit I: 0,85 m/Sek, 2225 kg Zugkraft am Hacken, mittlerer Querschnit der Furche 29,6 cm × 144,0 cm, pro Stunde gepflügte Fläche 0,3860 ha bei einem Verbrauch von 28,7 l Treiböl pro ha; bei Geschwindigkeit II: 1,32 m/Sek, 1935 kg Zugkraft am Hacken, mittlerer Querschnitt der Furche 28,5 cm × 134,0 cm, pro Stunde ungepflügte Fläche 0,4975 ha bei einem Verbräuch von 25,4 l Treiböl pro ha. Minimaler Verbrauch 27 l. Treiböl/PS-Stunde (Bei der Maschinenprüfungsstation erhaltene Ergebnisse).

tor fordern wir die Verrichtung schwerer Arbeiten, die von Tieren nicht mehr gut geleistet werden können. Der heutige Zeitgeist lässt es auch nicht mehr zu, sich vorzustellen, dass man ein Tiefackern oder Verfrachten von schweren Lasten anders als mit Verwendung von maschinellen Hilfsmitteln durchführen könnte. Eine grosse Anzahl von Tieren z, B. 5—6 Paare, an einen Pflug beim Tiefackern gespannt, arbeiten nicht rationell und zwar drücken die vorderen durch das Ziehen auf die nachfolgenden, jedes Tier hat seinen eige-

nen individuellen Gang, der von dem der anderen verschieden ist, die Tiere behalten ihre Richtung nicht bei usw. Diese individuellen Abweichungen ergeben seitliche Kraftkomponenten und die resultierende der von allen Tieren zusammen entwickelten Kräfte oder besser gesagt die Zugkraft am Hacken ist nicht gleich der Summe der von jedem einzelnen Tier entwickelten Kraft, sondern irgend ein Prozentsatz, der von Art zu Art und sogar von Tier zu Tier schwankt.

Pferde z. B., die schneller unruhig werden und nicht im Ruhestand angespannt festhalten, setzen sich viel schwerer in Gang als Ochsen, wenn sie sich in einem längeren Gespannzug befinden.

Dann ist auch ihre Dressur sehr verschieden und es genügt in einem Gespann von 5—6 Paaren nur ein störrisches Pferd zu haben, um alle anderen zu hemmen. Ausserdem erfordert ein solches Gespann ein zahlreiches Personal, da im allgemeinen jedes Tierpaar seinen Lenker benötigt, während ein Traktor, der einen 3—5 scharigen Pflug zieht, von einem einzigen Mann und höchstens noch einem Hilfsarbeiter bedient werden kann.

Es gibt ferner Maschinen, wie Mähmaschinen mit Selbstbinder, Mäh-Dreschmaschinen usw., die nur mit dem Traktor zufriedenstellend gezogen werden können, da ausser der Zugkraft am Hacken noch verschiedene Teile der Maschine durch die Cardanwelle des Traktors gesondert angetrieben werden müssen. Wenn sie dagegen von Tieren gezogen würden, müssten wir auch über einen Motor verfügen, der diese gewissen Teile der Maschine gesondert in Bewegung setzt, denn diese Maschinen haben gewöhnlich einzelne bewegliche Teile, die sich mit einer der Fortbewegungsgeschwindigkeit der Maschine direkt proportionellen Geschwindigkeit bewegen müssen, d. h. also, dass sie vom Triebrad der Maschine angetrieben werden müssen, während die anderen Teile, die eine konstante, oder fast konstant bleibende Betriebsgeschwindigkeit fordern von der Cardanwelle des Traktors, oder einem separat auf der Maschine angebrachten Motor angetrieben werden.

Die tierische Zugkraft hat den Vorteil, dass sie bis zu einer gewissen Grenze im Verhältnis zur notwendigen Kraft unterteilt werden kann, während die toten Motoren nicht unterteilt werden können. Bei einem 30 PS-Motor z. B. fahren wir mit sämtlichen Pferden los, sowohl bei schweren als auch bei leichten Arbeiten, wobei wir nur im ersten Falle einen höheren Wirkungsgrad des Motors erreichen.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass wir bei den Motoren die Arbeit der zur Verfügung stehenden Kraft anpassen müssen,

die konstant ist, während wir bei Verwendung von Tieren die Kraft den Bedürfnissen anpassen, was einen bedeutenden Vorteilt darstellt. Dazu kommt noch die grosse Elastizität bei Verwendung von tierischer Zugkraft d. h. die Möglichkeit zu einer bestimmten Zeit über die 4—5 fache mittlere Leistung zu verfügen, während bei maschineller Zugkraft, besonders bei den Explosionsmotoren, die in der Landwirtschaft allgemeine Verwendung finden, die Möglichkeit einer Ueberlastung sehr gering ist. Ausserdem ist festzustellen, dass eine maschinelle Einrichtung die Energie umwandelt oder weitergibt, zunächst sich selbst versorgt, indem sie eine gewisse Energiemenge für ihre eigene Inbetriebhaltung verbraucht und nur einen Restteil von dem weitergibt, was ihr zugeführt wird. [1])

Es ergeben sich also augenscheinlich gleichzeitig zwei Probleme: das eine technischer Natur und zwar die Möglichkeit der Durchführung verschiedener Arbeiten, das andere wirtschaftlicher Natur den Preis der Arbeit betreffend. Beide schwanken innerhalb sehr weiter Grenzen. Obwohl die Zugtiere während der ganzen Jahreszeit unterhalten werden müssen und die ständige Anwesenheit des Menschen erfordern, gleichgültig ob sie arbeiten oder nicht, so ist ihre Pflege verhältnismässig leicht, während die der Motore bedeutend schwieriger ist.

Die Verwendung von Traktoren erfordert viel Voraussicht. Wir müssen die Möglichkeit einer Reparatur an Ort und Stelle im Auge behalten, um die Arbeit nicht lange zu unterbrechen, zu welchem Zwecke wir die gründliche Durchsicht der Maschine während der Winterzeit vornehmen müssen, um Ersatzteile rechtzeitig besorgen und dem Personal, das nicht zu entlassen ist, wie dies meistens geschieht, Beschäftigung geben können. In landwirtschaftlichen Betrieben, die Traktore verwenden, ist es angezeigt, auch Zugtiere vorzusehen, die den Traktor, falls derselbe während der Arbeitssaison schadhaft werden sollte, was einen bedeutenden Schaden verursachen könnte, ersetzen. In letzter Zeit wurden zu diesem Zwecke sogar grosse Maschinen sowohl für tierische als auch für maschinelle Zugkraft gebaut. So kann also derselbe Mähbinder mit oder ohne Vorderwagen arbeiten, je nachdem er von Tieren oder von einem Traktor gezogen wird.

Die Reparaturkosten sind je nach der Traktortype dem verwendeten Baumaterial, der Haltung der Maschine, usw. sehr verschieden. Bei fachmännischer Behandlung können dieselben wesen-

1) M. RINGELMANN: La culture mécanique.

tlich herabgesetzt werden, sodass die Lebensdauer, die bei der Errechnung der Amortisationsquote und der Kosten pro bearbeiteter Flächeneinheit ausschlaggebend ist, um ein bedeutendes vergrössert wird.

Wir müssen ferner auch die Art des energieliefernden Rohstoffes berücksichtigen, die nicht nur vom landwirtschaftlichen und industriellen Gesichtspunkt, sondern auch vom Standpunkt der nationalen Unabhängigkeit aus gewertet werden muss. In dieser Hinsicht hat uns der Reichtum unseres Landes begünstigt, da wir den Treibstoff für landwirtschaftliche Motoren nicht importieren müssen. Doch müssen wir bedenken, dass die natürlichen Quellen nicht unerschöpflich sind, ja dass man sogar voraussieht, dass diese in einer nicht zu fernen Zukunft zum grossen Teil versiegen werden. Wir müssen ferner die Möglichkeit der rechtzeitigen Versorgung mit dem nötigen Treibstoff, die Entfernung bis zur nächsten Verkaufsstelle, die Transportverhältnisse, den Preis, usw. in Rechnung stellen, während unsere Tiere in gewissen Gegenden unverkäufliche Futtermitteln, wie Stroh, Maisstauden, usw. verwerten können, die es sich nicht lohnt zu entfernten Marktplätzen zu transportieren. Sie für Viebzucht zu verwenden und das Vieh nachher zu verkaufen, ist viel einfacher und hält auch eine unnütze Verschleuderung derselben hintan. Hinsichtlich des Verbrauches sind also Tiere weniger anspruchsvoll als leblose Traktoren. Die ersteren können Rohfuttermittel verwerten, die billig sind und jedem Landwirte zur Verfügung stehen, während die letzteren, wie wir gesehen haben, im allgemeinen destillierte, also viel teuerere Produkte verbrauchen, die nicht überall vorhanden sind.

Gegenwärtig haben wir in Rumänien eine zu grosse Anzahl von Traktortypen verschiedener Herkunft, die Rohöl, Diesel-Treiböl, Petroleum oder Benzin verbrauchen. Es wäre gut, wenn wir uns auf eine kleinere Anzahl beschränken und wenn wir die Typen, deren Motore mit Schwerbenzin laufene, vorziehen würden, da dieses verhältnismässig billig ist und fast keine Rückstände hinterlässt und Motordefekte selten sind. Steht Schwerbenzin nicht zur Verfügung, so soll auch Petroleum verwendet werden können, da dieses auf dem rumänischen Markt ständig zu finden ist, obwohl es eine geringere Leistung ergibt.

Auch die praktisch erzielten Ergebnisse sind zu berücksichtigen, die je nach Ort und Zeit verschieden sind. Wir werden also auf die Anpassungsfähigkeit des Traktors an die von uns gestellten speziellen Aufgaben, wie auf die Möglichkeit der Beseitigung der sich

einstellenden Schwierigkeiten zu achten haben. Im allgemeinen haben sich die Traktoren den verschiedenen landwirtschaftlichen Arbeiten, die sie zu verrichten haben, angepasst und ihre Anwendungsmöglichkeit ist in der Hauptsache eine Kostenfrage. Gegenwärtig ist es in der rumänischen Landwirtschaft schwer, sich zu sehr der maschinellen Zugkraft zuzuwenden, da die menschliche und tierische Arbeitskraft verhältnismässig billig und das Kapital teuer ist. In Zukunft wird aber die maschinelle Zugkraft auch bei uns im grösseren Ausmasse zur Verwendung gelangen müssen, jedoch mit gewissem Vorbehalt hinsichtlich ihrer Anwendung. Die Tiere können Fleisch, Milch, usw. liefern und in gewissen Gegenden sind sie mit Rücksicht auf den Dünger sogar ein notwendiges Uebel, trotzdem das Kgm tierischer Arbeit durch maschinelle Arbeit wirtschaftlich bei Verwendung irgend eines Brennstoffes ersetzt werden könnte. Es ist auch hervorzuheben, dass maschinelle Zugkraft nicht in jedem landwirtschaftlichen Betriebe zur Verwendung gelangen kann, oder dass wir den richtigen Platz für verschiedene tierische wie maschinelle Motoren in wirtschaftlicher Weise für bestimmte Arbeiten finden werden. Die Einführung der maschinellen Zugkraft muss also nur als ein Mittel zur Verringerung der Zahl an Zugtieren im Rahmen der Möglichkeit betrachtet werden, ohne jedoch deren gänzliche Beseitigung zum Ziele zu haben.

Wenn wir von den maschinellen Arbeiten in der Landwirtschaft sprechen, si denken wir insbesonders an die des Pflügens, das etwa 70—80% der für die verschiedenen Bodenvorbereitungsarbeiten notwendigen Energie aufnimmt [1]), wobei der Anteil der hierzu aufgewendeten Zeit ziemlich im selben Verhältnis steht.

Häufig sind auch die Fälle, wo die tierische Zugkraft allein für die Bewältigung der landwirtschaftlichen Arbeiten nicht ausreicht, was besonders bei Grossbetrieben der Fall ist. Dabei ist es ratsam, die schweren Arbeiten mit dem Traktor und die leichten mit Zugtieren auszuführen.

Eine Verhältniszahl zwischen tierischer und maschineller Zugkraft bei ihrer Verwendung in einem landwirtschaftlichen Betriebe kann nicht gegeben werden, da dies von vielen spezifischen Faktoren abhängt. Im allgemeinen werden auf die bebaute Fläche in kleineren Wirtschaften mehr Zugtiere als in Grosswirtschaften kommen, da die ersten einen Traktor gewöhnlich wirtschaftlich nicht verwenden können, sodass sie gezwungen sind, bei der Tierzugkraft zu bleiben, wobei sie in ganz besonderen Fällen bezahlte maschi-

1) RINGELMANN zitiert von J. H. SAURISSEAN in: Elektrisches Pflügen.

nelle Zugkraft aufnehmen werden. Andere Ursachen, ausserhalb der Grösse der Wirtschaft stehend, sind: die Beschaffenheit des Bodens (schwer oder leicht, feucht oder trocken, usw.) die Entfernung der Felder wie deren gegenseitige Lage, die Intensität des Betriebes, die wirtschaftlichen und sozielen Verhältnisse, die Tierart und deren Zustand, die persönlichen Eigenschaften des Leiters usw.

Die Verbreitung der maschinellen Zugkraft hängt auch noch von der Ueberlieferung ab. Unser Landwirt kann sich nur schwer zur Anlage eines grösseren Kapitals in Maschinen entschliessen, während er an Tiere von Kindheit auf gewohnt ist, ihre Zucht und Wartung ist ihm Überlieferung und erfühlt mit ihnen und liebt sie, indess Motore Mannschaft von besonderer Ausbildung fordern. Unsere Sagen und Legenden berichten von schönem Vieh und nicht von tüchtigen Schmieden, wie die deutschen Märchen. Trotz der eigenen gut organisierten Traktorenindustrie ist man in Deutschland bei der Einführung und Verbreitung derselben recht massvoll vorgegangen. Gleichfalls in Amerika, wo der Farmer zumeist auch guter Mechaniker ist und wo infolge der teueren Arbeitskräfte die Verwendung des Traktors im Vorhinein wirtschaftlich erscheint. Auch bei uns in Siebenbürgen ist der Besitzer einer mittelgrossen Wirtschaft gewöhnlich auch derjenige, der den Traktor betreut. Nach vollendeter Feldarbeit geht er mit seinem Traktor auf Lohnarbeit. Der Kleinbauer hingegen wird die Hände seiner Familie und die Zugkraft der Tiere in seiner Wirtschaft ganz und voll auszunutzen versuchen.

Die Wirtschaftlichkeit der Traktore hängt vor allem von der Preislage, die für menschliche und tierische Arbeit gezahlt wird, ab. Besonders in der Nähe der Städte ist das Futter teuer, die Tiere werden zum Frachten verwertet, während die menschlichen Arbeitskräfte gut bezahlte Arbeit finden, was bei grossen Entferungen von der Stadt nicht immer der Fall ist, sodass sie in der Landwirtschaft vorteilhaft verwendet werden können. Hier haben die Traktore mehr die Aufgabe die Spitzenbelastung der Saisonarbeit auszugleichen, um nicht eine zu grosse Anzahl von Zugtieren halten zu müssen, für die wir nur an einer zu geringen Zahl von Tagen des Jahres Arbeit hätten, während wir andernfalls mit einzelnen Arbeiten in dieser Zeit der höchsten Arbeitsleistung verspäten müssten, was von Schaden wäre.

Bei der Berechnung der Wirtschaftlichkeit des Traktors, müssen wir ausser den Kosten der Arbeit pro ha auch die Gesamtkosten der

Arbeit berücksichtigen [1]). Wenn mit dem Traktor während einer längeren Periode gearbeitet wird, so sinken zwar die Kosten der Arbeit bis zu einer gewissen Grenze, die Gesamtkosten hingegen steigen jedoch und die Zugtiere bleiben unbeschäftigt. Die Zugtiere müssen aber voll beschäftigt werden und der Traktor soll nur einen. Orgnaisationsmangel des Betriebes verbessern. In einer Getreidewirtschaft z. B. sind die Arbeiten viel ungleichmässiger verteilt als in einer Wechsel-Wirtschaft und aus diesem Grunde muss im ersten Falle neben einer grösseren Anzahl von Tieren auch der Traktor in grösserem Umfange Verwendung finden.

Wenn der Unterhalt eines Tieres 5000 Lei jährlich kostet und wir 200 Arbeitstag im Jahr annehmen, so kostet ein Arbeitstag 25 Lei, bei 100 Arbeitstagen belaufen sich die Kosten für einen Arbeitstag auf ungefähr 50 Lei. Je mehr die Tiere arbeiten, umsomehr nähert sich der Wert ihrer Arbeit den Kosten ihres Unterhaltes.

Wen in einer Wirtschaft die tierischen und maschinellen Arbeiten gut verteilt sind, so ergänzen sie sich gegenseitig in passender Weise und die Wirtschaftlichkeit steigt. Zu diesem Zweck muss zwischen dem Wert der Traktoren und demjenigen der Zugtiere pro Flächeneinheit Gleichgewicht herrschen. Infolge der verfehlten Zollpolitik gleich nach dem Weltkriege, wurde der Viehexport mit grossen Taxen belastet, es konnte kein Vieh mehr über die Grenze geschickt werden und die Preise gingen stark zurück. Da der Getreidepreis hoch war, kauften die Landwirte eine grosse Zahl Traktoren, die ihnen in den meisten Fällen sehr viele Unannehmlichkeiten bereiteten, da sie keine erfahrenen Führer hatten, während später auch der Preis des Getreides sank.

Bei der Anschaffung von Traktoren muss man in erster Linie die Wirtschaftlichkeit der Tiere und ihrer Erzeugnisse berücksichtigen. Die rumänischen Zugtiere sind anspruchslos und ziehen gut. Ferner dürfen wir nicht vergessen, dass Rumänien ein Einfuhrland für Traktore und ein Ausfuhrland für Vieh ist. Das Vieh ist ein ziemlich sicherer Ausfuhrartikel und wenn das Getreide infolge ungünstiger Klimabedingungen nicht gediehen ist und wir für den Export nichts mehr übrig haben, so könnte es das Vieh ersetzen. Ausserdem liefert das Vieh der Bevölkerung Nahrung und Bekleidung.

Die Kosten der Verwendung des Traktors hängen von dem üblichen Zinsfuss des Kapitals, ferner von seiner Amortisierung und von den Reparatur- und Erhaltungskosten ab. Der Zinsfuss bleibt

1) N. CORNĂŢEANU. — Tractorul şi secerătoarea treerătoare in agricultura noastră.

für jede Verwendungsdauer des Traktors konstant, während die Amortisation, die Erhaltungs- und Reparaturkosten mit der Dauer der Verwendung des Traktors im Laufe eines Jahres steigen. Auch die physikalischen und chemischen Einwirkungen müssen in Betracht gezogen werden, die den Wert des Traktors verringern, auch wenn er nicht arbeitet. Diese Abnützung ist umso stärker, je schlechter der Traktor unterhalten wird und kann mit einem Minimum von 3% angenommen werden. Altert und vor allem veraltet der Traktor so entspricht er nicht mehr den Anforderungen und nach einer gewissen Zeit findet man keine Ersatzteile mehr.

Der Traktor muss robust, aber gleichzeitig möglichst einfach sein und von einem gewöhnlichen Mechaniker bedient werden können, d. h. derselbe soll keiner Spezialausbildung bedürfen.

Der Preis des Traktors soll denjenigen der Zugtiere, die er ersetzt, nicht überschreiten. oder jedenfalls möglichst wenig. Trotzdem dürfen wir manchmal nicht zögern auch einen grösseren Preis zu bezahlen, wenn dieser durch die Güte der Arbeit und ihre rechtzeitige Ausführung ausgeglichen werden kann.

Zusammenfassend können wir sagen, dass man in einer rationellen Landwirtschaft für die verschiedenen beseelten und leblosen Motore die geeigneten Plätze finden wird, wobei jeder gewisse Arbeiten wirtschaftlich verrichtet. Die kleineren und mittleren landwirtschaftlichen Betriebe sind infolge ihrer geringeren Bedürfnisse auf die Tierzugkraft angewiesen und können sich in Ausnahmefällen bezahlter maschineller Zugkraft bedienen. Wenn wir eigene Traktore verwenden, müssen sie auch Lohnarbeit leisten. Die landwirtschaftlichen Grossbetriebe haben sowohl grössere Möglichkeiten als auch grössere Bedürfnisse und können sich daher den Umständen entsprechend organisieren.

631.41 SOLS

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DU SOL COMME TERRAIN ARABLE ET COMME TERRAIN DE CONSTRUCTION

par **Dr. Ing. Chim. Gh. Pavlovschi** et **Dr. R. Mavrodineanu**

Les propriétés physiques du sol dérivent des propriétés physico-chimiques de la fraction colloïde, qui porte le nom de complexe absorbtif du sol.

L'état physique du sol est déterminé non seulement par la capacité d'absorbtion, mais aussi par la nature des cations absorbés

Pour caractériser le sol comme terrain arable ou comme terrain de construction, il est necesaire de déterminer la grandeur du complexe adsorbtif, la capacité d'adsorbtion et la quantité de chaque cation qui se trouve dans la complexe adsorbtif.

Cette détermination peut être realisée par la voie de la titration électrometrique.

Les propriétés physiques du sol, comme terrain arable ou comme terrain de construction, sont déterminées par le comportement reciproque de deux facteurs inséparables: le sol et l'eau.

La forte liaison entre la phase solide et la phase liquide, est due à peu prés exclussivement, à la présence dans le sol de la fraction colloïde organo-minérale, qui porte le nom de complexe adsorbtif du sol.

Cette fraction colloïde, forme une système polydispersif; elle a une tendence caractéristique pour l'hidratation, pour la formation d'une pellicule d'eau avec laquelle s'entourent les particulles colloïdes.

Ayant à sa disposition une quantité suffisante d'eau, le sol augmente de volume à cause de l'hydratation, il se gonfle. Etant maintenu dans un milieu sec, il perd l'eau et le volume du sol diminue; étant soumis a une pression, il se contracte.

Pour démontrer la liaison qui existe entre la contraction linéaire du sol et la grandeur du complexe, ou plus précisement la capacité d'adsorbtion du complexe adsorbtif, nous donnons dans le tableau I, les résultats expérimenteaux obtenus par K. ENDELL et P. VAGELER. Ces auteurs expriment cette liaison avec l'aide de la formule hyperbolique:

$$\text{la contraction linéaire} = \frac{18\,T}{18+T}$$

dans laquelle T représente la capacité d'adsorbtion du complexe adsorbtif exprimée en milli-équivalents pour cent grammes de sol; dans ce cas, la contraction linéaire est exprimé en pourcentage.

TABLEAU I

No. du sol.	T Capacité d'échange en milli-équivalents	Contraction linéaire %	
		Trouvée	Calculée
1	3 08	2.5	2.6
2	7.08	5.0	5.0
3	9.1	6.3	6.0
4	11 7	6 6	7.0
5	12.7	7.1	7.4
6	14 0	7.0	7.8
7	15.8	7.5	8.3
8	20.1	9 0	9.5
9	41 2	13 8	12.5
10	55 1	15.0	13.6

Les dernières recherches ont confirmé que les propriétés physiques du sol sont influencées, non seulement par la capacité du complexe adsorbtif, mais aussi par la nature des cations qui se trouvent dans ce complexe.

Ainsi, la présence du calcium, accentue le caractère hydrophobe de la fraction colloïde; à cause de cela, la capacité de l'eau du sol diminue; le gonflement, à la suite de l'hydratation, devient moins prononcé; la perméabilité s'accroit et la coagulation, des particules colloïdes donne des agrégats plus résistants.

La présence du sodium dans le complexe adsorbtif, donne au colloïde un caractère hydrophile et en même temp la capacité d'eau ainsi que le degré de dispersion augmente, tandis que la perméabilité diminue.

F. A. KLINEFELTER, W. W. MEYER, et E. J. VACHUSKA, ont demontré la liaison qui existe entre la capacité d'adsorbtion et la résistence à la rupture des objets secs, confectionnés en terre glaise

et ont prouvé que le même facteur détermine toute une série de propriétés physiques des matériaux utilisés dans l'industrie céramique.

En appliquant la théorie électrochimique à l'interprétation des phénomènes spécifiques pour les systèmes colloïdes, VAGELER a démontré que tout l'ensemble des propriétés physiques du sol, ainsi que la dynamique de ces propriétés, se trouve être fonction de la nature et de la quantité des différents cations du complexe adsorbtif.

Cette liaison est si précise, que nous pouvons caractériser calitativement le matériel étudié et nous pouvons calculer certaines propriétés d'importance technique avec l'exactitude qui assure l'utilisation des valeurs obtenus dans la pratique.

Ainsi, le calcul de la distance la plus rationelle, E (en mètres) entre les fossés de drainage, peut s'obtenir à l'aide de la formule:

$$E = 30 - 6.1\sqrt[3]{\varepsilon K}$$

ou εK représente la somme des bases échangeables (exprimée en gramme-molecules pour cent grammes de sol).

Pour le calcul de l'eau hygroscopique $(H\ y)$ d'après MITSCHERLICH, VAGELER propose la formule:

$$H\ y = 0.48\ \varepsilon K$$

Un intérêt particulier présente la possibilité d'exprimer en fonction de la valeur K, la capacité minime d'eau, c'est-à-dire la quantité d'eau retenue par le système dispersif. avec la force osmotique, qui contrebalence le gravitation. Cette valeur peut être calculée à l'aide de la formule de VAGELER:

$$C_{m\ n} = 2.2\ \varepsilon K$$

ou

$$C_{min} = 4.6\ H\ y$$

De cette courte exposition il resulte que la détermination de la capacité d'échange du complexe adsorbtif du sol, ainssi que la détermination des bases échangeables, nous donnent la possibilité de caractériser, au point de vue des principales propriétés physiques, autant les terrains arables, que ceux destinés aux différentes constructions téchniques.

Pour la détermination de la capacité d'échange du sol, nous proposons une méthode qui permet la réalisation de ces déterminations avec une exactitude satisfaisante, en employant le titrage électrométrique.

La méthode de travail est la suivante: 10 grammes de sol, haché et passé par le tamis de 1 mm, est mélangé dans un verre Berzelius avec 200 cm^3 d'eau. On y ajoute la valeur d'un bout de couteau de quinhydrone, puis on introduit un électrode de platine avec un pont de liaison avec un semi-élement de comparaison et on mesure la différence de potentiel électrique, calculant la valeur du pH.

En placant une biurette avec de l'acide clorchydrique *n*/10, au des sus du verre Berzelius, qui contient notre sol, on laisse couler 1 cm^3 de cette solution dans le verre.

Après une agitation de 3 minutes, on mesure de nouveau la valeur du *pH*. Puis on ajoute de nouveau 1 cm^3 de *H Cl* et après l'agitation on redétérmine la valeur du *pH*. On répète cette operation jusqu'au moment où on arrive à la valeur du *pH* égale à 3.

Représentant dans un système de coordonnées, sur l'axe des abscisses les points 1, 2, 3, 4... correspondants aux additions de 1, 2, 3, 4... cc de *H Cl* n/10, et sur l'axe des ordonnées les valeurs *pH* respectives, nous obtenons un système de trois lignes, qui s'entrecroisent.

La dernière intersection (dans la région de la valeur *pH* égale à 3) correspond à la quantité de *H Cl* avec laquelle a été neutralisée la quantité de base du complexe adsorbtif.

En lisant sur l'axe des abscisses la valeur correspondante à la dernière intersection, nous obtenons la quantité de base contenue dans les 10 grammes de sol, exprimés en 0.1 milli-équivalents.

On déduit que le même chifre représente la quantité de base exprimée en milli-équivalents, rapportée à cent grammes de sol.

Quand le sol montre à la première détermination, une valeur *pH* plus petite que 6.5, il est nécessaire de déterminer aussi la capacité d'échange de l'hydrogène déplacable.

On fait cette opération a l'aide du même dispositif, avec 10 grammes de sol, traité dans un verre Berzelius, avec 200 cm^3 d'acétate de sodium *n*/10. On fait le titrage avec de l'hydroxide de sodium *n*/10 et on continue jusqu'à ce qu'on obtient la valeur du *pH* égale à 7.

Le nombre de cm^3 d'hydroxide de sodium, employé pour le titrage, correspond à la capacité d'échange de l'hydrogène dans le complexe adsorbtif. Ce chifre s'ajoute à celui obtenu pour la capacité d'échange des bases (obtenu par le titrage avec de l'acide clorohydrique).

Dans le cas où le sol contient du carbonate de calcium, on pro-

cède de la même manière. Le calcul commence par le point correspondant à la valeur p_H égale à 7, jusqu'a la derniere intersection du ségment (à peu prés $p_H=3$).

De cette manière on peut obtenir la valeur *T*, c'est-à-dire la capacité d'échange du complexe adsorbtif. De la valeur *T*, on obtient la valeur *sK*, qui représente la somme des points à action osmotique, ce qui correspond au nombre des gramme-molécules se trouvant dans le complexe adsorbtif.

La valeur *εK* s'obtient exactement par la voie de la determination directe des bases échangeables du complexe adsorbtif.

En tenant compte que les sols roumains ont un contenu de bases échangeables, qui dans le plus part des cas sont formées de 84% calcium, 10% magnezium, 4% potasium et 2% sodium, nous pouvons déduire, avec une certaine aproximation, la valeure *εK*, de la valeur *T*.

Pour démontrer la vraissamblance de la conception de VAGELER et l'utilité du procedé que nous proposons, nous donnons, dans le tableau II les résultats obtenus de la détérmination des valeurs *T*, *εK*, ainsi que les valeurs *H* y, détérminées et calculées d'après la formule:

$$Hy=0.48\ K$$

TABLEAU II

Dénomination du sol.	T	εK	Hy	
			Déterminé	Calculé
Sol de forêt — -- — —	25.2	14 5	7.0	7.1
Văcăreşti — — — — —	15.4	7.7	3.9	3 7
Găeşti — — — — — —	13 7	9 4	4 7	4 5
Braşov — — — — — —	12.5	6 1	2.9	2.9
Bărăgan — — — — —	25.1	13 2	6 6	6.3
Floreşti — — — — —	18.4	9.5	4.8	4.6
Brâncoveni — — — —	18.8	10 6	5 2	5.1
Câmpia Turzii — — —	28.0	15 0	7.6	7.4

De ces resultats on constate une bonne concordance entre les valeur *Hy* détérminées et celles calculées.

Par conséquent, on peut tirer la couclusion suivante: L'importance pratique acordée jusqu'à présent à la détermination des valeurs *Hy*, est justifiée par le fait que cette valeur est proportionelle aux valeurs de *K* et *T*.

La valeur *Hy* reflète la grandeur et la nature des basse du complexe adsorbtif et seulement à cause de ceci on peut expliquer la forte liaison qui a été signalée entre la valeur *Hy* et toute la gamme des proprietés physico-chimiques du sol.

631.5 METHODES DE CULTURE AGRICOLE.

THE EFFECT OF PLOWING ON THE YIELD OF CORN, OATS, PEAS AND WHEAT, CULTIVATED ON BROWN FOREST SOIL.

by **Dr Irimie D. Staicu**
Faculty of Agronomy

Experiments have been conducted for seven years (1934—1940) on the Experiment Station Farm at Faculty of Agronomy from Bucureşti-România to determine the effect of time and depth of plowing on the yield and quality of winter wheat, corn, peas and oats.

Seven of the methods of seedbed preparation under observation were in a 4-year rotation of corn, oats, peas and wheat. These methods are as follows:

1. Fall plowed at 10 cm deep, T_{10}
2. „ „ „ 20 „ „ , T_{20}
3. „ „ „ 27 „ „ , T_{27}
4. Summer plowed 10 „ „ fall plowed at 10 cm deep and worked down, V_{10} T_{10}
5. „ „ 10 „ „ „ „ „ 20 „ „ „ „ „ , V_{10} T_{20}
6. „ „ 10 „ „ „ „ „ 27 „ „ „ „ „ , V_{10} T_{27}
7. „ „ 20 „ „ „ „ „ 10 „ „ „ „ „ , V_{20} T_{10}

Each plot has been replicated five times and has been prepared in the same way each season, except for oats following corn, so that the effect of any given treatment has become accumulative.

The experiments have been conducted on brown forest soil which is considered as one of most fertile soil from Romania. The highest yields obtained during the 7-years experiment period are as follows:

winter wheat	3774	kg.	per	Ha	for	the	season of	1938
corn	4737	„	„	„	„	„	„	1935
peas	2896	„	„	„	„	„	„	1936
oats	2688	„	„	„	„	„	„	1936

The annual rainfalls from January 1th 1933 to January 1th 1941 have been 522,8 mm.

Moisture and nitrate determinations have been made during the year 1938/39.

The density of heads par unit area, the height of the heads have been ascertained. The vegetative growth of plants has been closely watched.

The sterile cornstalks and stalks with two ears were counted.

The yield of grains and straw was ascertained. The difference between check yield and the yield of other treatments is certain if itis twice greater as the value of the probable error.

The Nitrogen content of all grains and the milling quality of winter wheat grains were analysed.

At seeding time, to a depth of 1,45 m, the amount of soil moisture is greater in the plots summer plowed as compared to the plots only fall plowed. During summer time there was no accumulation of rain water, contrarly there were loses of water accumulated before the time of summer plowing.

The loses were much greater in fall plowed plots as compared to summer plowed plots.

The moisture content, to a depth of 1.45 m, calculated in tons per Ha is as follows·

	T_{10}	T_{20}	$V_{10}T_{10}$	$V_{10}T_{20}$	$V_{20}T_{10}$		
At summer plowing time	3822	3987	4045	3942	3784	tons per	Ha
After fall plowing, at seeding time	2922	3046	3712	3608	3626	„	„
Differences	900	941	333	334	158	„	„

It was found that at seeding time the nitrate content increased very much in the plots plowed both in summer and fall. The increase of nitrate content to a depth of 1,45 m is as follows:

	T_{10}	T_{20}	$V_{10}T_{10}$	$V_{10}T_{20}$	$V_{20}T_{10}$		
At summer plowing time	45,3	40,3	41,2	40,3	47,6	kg. NO_3 per	Ha
After fall plowing, at seeding time	47,0	61,0	129,7	150,3	138,4	„	„
Differences	1,7	20,7	88,5	110,0	90,8	„	„

The fall plowing is easliy made in the plats summer plowed whitout bringing up big and hard lumps.

The working power measured by dynamometer on summer and fall plowed plots in 1938 gave the following total results:

T_{10}	T_{20}	$V_{10}T_{10}$	$V_{10}T_{20}$	$V_{20}T_{10}$	
175	400	200	400	450	Kg.

It is easily seen that the working power is twice as great on plots fall plowed at 20 cm deep, T_{20}, than on plots plowed at 10 cm deep in summer and then 10 cm at fall time, V_{10} T_{10}.

At seeding time the soil has been in good conditions only on summer plowed plots. Consequently on these plots the seeds were introduced in soil at the same depth, the germination has been always uniform and it take place independently of subsequent rainfalls, the number of stools per plant were strikingly high. As a results of better germination and stooling, the wheat on summer plowing plots averaged more heads per unit area of land as did fall plowing. The wheat grown on summer plowed plots was more vigorous of a dull green color, and taller than the wheat grown on fall plowed plots which was of yellowish green color and darfer.

The yields of winter wheat in kg/Ha, averages of seven years are as follows:

		D±mD
T_{10}	2122 ± 137	Check
T_{20}	2317 ± 135	195 ± 192
T_{27}	2269 ± 103	147 ± 171
V_{10} T_{10}	2968 ± 85	846 ± 161
V_{10} T_{20}	2878 ± 97	756 ± 168
V_{10} T_{27}	2802 ± 92	680 ± 165
V_{20} T_{10}	2926 ± 144	804 ± 178

The yields are constantly greater on summer plowed plots. The beneficial effect of summer plowing on winter wheat yields is quite clear.

The influence of plowing depth was far less as the influence of plowing date.

The differences in yields due to the depth of plowing in most cases are small and are also within the limits of probable error. Only in 1938 the yield on plots only fall plowed at 20 cm and 27 cm deep has been substantially greater as compared to the yield on plots shallow plowed. In the autumn of 1938 felt many rains before and after seeding time.

The protein ,wet and dry gluten content are constantly higher in the grains of wheat harvested on plots summer plowed.

The dry gluten content, average of six years records is as follows:

T_{10}	T_{20}	T_{27}	$V_{10}T_{10}$	$V_{10}T_{20}$	$V_{10}T_{27}$	$V_{20}T_{10}$
7,38±0,50,	8,07±0,48,	8,30±0,43,	9,83±0,55,	10,65±0,69,	10,72±0,60,	10,43±0,70

The protein, wet and dry gluten content of wheat grains are slightly higher on plots deep plowed as compared to plots shallow plowed.

The corn yields in kg/Ha average of seven years are as follows:

		D±mD
T_{10}	3303 ± 109	Check
T_{20}	3367 ± 137	64 ± 175
T_{27}	3380 ± 135	77 ± 173
V_{10} T_{10}	3423 ± 104	120 ± 150
V_{10} T_{20}	3555 ± 108	252 ± 153
V_{10} T_{27}	3533 ± 109	230 ± 154
V_{20} T_{10}	3363 ± 125	60 ± 166

The summer plowing did not increase materially the yields of corn constantly. In some years there has been a greater increase due to summer plowing. The deep plowing affect slghtly the yield of corn. The corn grains yielded on summer plowed plots have been richer in Nitrogen. The summer plowing was more effective in weeds control.

The oats following corn did not receive a summer plowing. The Nitrogen content of grains is almost the same in all treatments.

The average yields in kg/Ha of seven years records are as follows:

		D±mD
T_{10}	1847 ± 115	Check
T_{20}	1931 ± 88	84 ± 145
T_{27}	1934 ± 105	87 ± 156
T_{10}	1981 ± 108	134 ± 158
T_{20}	2008 ± 101	161 ± 153
T_{27}	1960 ± 90	113 ± 146
T_{10}	1914 ± 105	67 ± 156

The increase of yield due to a deeper plowing is very small. The Nitrogen content of grains is almost the same.

The average grain yields of peas in Kg/Ha secured from 7-years tests are as follows:

		D±mD
T_{10}	2066 ± 89	Check
T_{20}	2182 ± 113	116±144
T_{27}	2205 ± 152	139±176
V_{10} T_{10}	1973 ± 176	— 93±197
V_{10} T_{20}	2026 ± 101	— 40±135
V_{10} T_{27}	2071 ± 120	5±149
V_{20} T_{10}	1995 ± 120	— 71±149

The summer plowing did not prove to be a factor of increase in peas yield. Contrarly in some years on summer plowed plots the yields have been smader as compared to the yields on plots only fall plowed.

In all cases plowing deeper as 20 cm proved to be of no value.

EINE NEUE METHODE FÜR DIE BESTIMMUNG DER DREHUNGSZAHL EINES TEXTILFADENS

von **C. Casassovici - D. Teodorescu - I. Ionescu-Muscel**

Die Bestimmung der Drehzahl auf eine Längeneinheit eines Fadens, wird durch die Methode Marschik mit Hilfe des Apparates von Schopper vorgenommen. Falls die hergestellten Fäden aus kurzen Fassern hergestellt worden sind, sind, die Resultate schwankend und ungleich

Die Herren Ing. C. CASASSOVICI, *Dr.* TEODORESCU *und Ing.* I. IONESCU-MUSCEL *haben eine neue Metode für die Bestimmung der Drehungszahl gefunden, durch welche genaue Resultate für den gleichen Faden erzielt werden.*

Die Haupteigenschaft eines Textilfadens ist die Drehungszahl einer Längeneinheit, die durch Umdrehen erzielt wird. Diese Zahl hängt im allgemeinen von der Art der Faser, vom Zwecke für welchen der Faden fabriciert wird und von seiner Feinheit ab.

Zwischen T, der auf einer Länge von 1 Zoll angewandten Drehungszahl und zwischen der englischen Zahl *Ne*, besteht der Zusammenhang:

$$T = \alpha \sqrt{Ne}$$

Der Wert des Koeffizienten schwankt je nach der Bestimmung des Fadens wie folgt:

Wert des Koeffizienten

Baumwolle		Wolle	Kammgarnwolle	Hanf
Faden für Kett	3,5—4	2,58	2	2
Faden für Schuss	3—3,5	1,29	1,7	1,9
Extragedrehter Faden	4,4—4,5	—	—	—
Faden für Strumpfe	2,7—7	—	—	—

Das Suchen der Drehzahl *T* besteht im Prinzip darin, den Faden aufzudrehen bis die Fasern parallel laufen und die durch die-

ses Aufdrehen angewanten Umdrehungen zu zählen und die Ergebniss wird für eine Längeneinheit ausgedrückt.

Praktisch ist schwer, dass der Untersucher genau dann aufhört, wenn die Fasern parallel sind, denn sogar mit Hilfe der Lupe kann infolge der kurzen Länge der Fasern kein reiner Parallelismus zwischen diesen unterschieden werden.

MARSCHIK hat eine neue Methode geschaffen, welche für die Bestimmung der Drehungszahl bei Fäden sich besser bewährt.

Nach MARSCHIK wird der Faden in 2 Klammern eingespannt, wovon eine Klammer fest, und die andere beweglich ist.

Man dreht in einer Richtung bis zum Brechen des Fadens dann macht man eine neue Probe und dreht in entgegengesetztem Sinne bis zum Bruch. Man erziehlt die Drehzahl durch die Hälfte der Differenz der Resultate:

$$Z = \frac{N_2 - N_1}{2}$$

Die erhaltenen Resultate sind nicht von einer genügenden Genauigkeit, aber die Methode MARSCHIK wird in sehr grossem Masse angewandt, denn die technische Manipulation ist einfach und man erhält praktisch annehmbare Resultate, wenn man den Durchschnitt von 10 oder mehreren Versuchen nimmt.

Die Gründe, aus welchen die Methode MARSCHIK keine genauen Resultate geben kann rührt von folgendem her:

Die Drehung und die Aufdrehung des Fadens erwirkt einen Längenunterschied und im Falle eines gegebenen Fadens ist die Anzahl der Drehungen dieselbe für eine gleiche Länge. Wenn wir annehmen, dass der Faden mit einem Drehapparat gedreht wird, so verkleinert sich seine Länge, da die Entfernung zwichen den Klammern aber fest ist, ist der Faden einer Zugkraft ausgesetzt, welche sich hinsichtlich der Länge auswirkt. Ausserdem arbeitet auch die Verdrehungskraft, welche sich durch eine Verlegung auswirkt, deren Lage senkrecht auf der Länge des Fadens ist. Wenn das Resultat der elastischen Zug und Drehungsreaktionen von den äusseren Kräften überholt wird, so bricht der Faden. Man nimmt an, dass beim Bruch die Länge und also auch die Drehungszahl die gleichen sind für die aufeinanderfolgenden Proben. Diese Annahme ist nur in dem Falle wirklich genau, wenn es sich um einen idealen Faden handelt, denn die Praxis zeigt uns, dass die Länge, während der Bruchzeit von gewissen Schwankungen abhängig ist. Wir verstehen unter Länge, welche der Fadenteil in jenem Moment

haben würde, wenn er nur der Drehung ausgesetzt wäre, wenn also die Zugkraft gleich Null wäre.

Der Durchmesser des Fadens ist nicht gleich, denn es gibt keinen gleichmässig perfekten Faden und de Bruch vollzieht sich bei der Sektion, die dem minimalsten Durchmesser entspricht. Hinzu kommt die Gleichartigkeit des Textilmaterials aus dem der Faden gewebt wurde, denn der Bruch vollzieht sich an der Stelle, wo der spezifische Widerstand kleiner ist.

Nach oben Gesagtem erscheint die mit der Methode von MARSCHIK bestimmte Drehungszahl nicht als eine konstante Zahl, sondernn allgemeinen Falle ist es eine Funktion, des spezifischen Widerstandes und der Länge der Fäden. Dies ist der Grund, aus welchem die Bestimmungen wenig übereinstimmend sind, besonders wenn die Distanz zwischen den Klammern klein ist. Nach PINAGEL ist die Methode nur für Längen zwischen genügend grossen Entfernungen zwischen die Klammern genau, eine Bedingung, welche im Falle von kurzen Fasern nicht erfüllt werden kann.

Wir haben eine Methode gefunden, durch welche eine Probe von gewisser Anfangslänge gehalten zwischen Klammern, aufgedreht wird und im entgegen gesetztem Sinne wieder zu gedreht wird bis die Länge des Fadens zwischen den Klammern mit der anfänglichen identisch ist. Die wirkliche Drehungszahl wird die Hälfte der Umdrehungen sein, die der Umdrehungsapparat anzeigt.

Wir bemerken, dass die Firma Schopper Garnprüfungs-Apparate für die Bestimung der Drehungszahl konstruiert hat, mit einem Anzeigesystem, das mit einer der Klammern in Verbindung steht und das genau alle Längenveränderungen des Fadens während der Zeit der Bestimmungen der Umdrehungen anzeigt.

Ein konstantes Gewicht wirkt auf das Ende des Fadens ein, und verursacht oft den vorherigen Bruch des Fadens infolge der Dehnung und diese Tatsache wird sogar von MARSCHIK als ernster Grund angeführt, dass die Resultate ungenau sind.

Unsere Methode beseitigt alle Nachteile der anderen Methoden für die Bestimmung der Umdrehungen und ihre Originalität besteht, in der Erziehlung der gleichen Anfangs- und End-länge des in der Klammer festgehaltenen Fadens, durch Messung des Maximaldurchhanges (der maximalen Sehnenhöhe) die durch eine konstante Kraft, die an der Mitte des Fadens welches wirkt, gebildet wird.

Im Wirklichkeit kann der Fadenteil als ein Kabel, das in den Punkten *A* und *B* (Fig. 1) fixiert ist, betrachtet werden, welches

sich auf dem gleichen Niveau befindet. Eine Kraft *F* arbeitet in der Mitte des Fadens und erzeugt den Maximaldurchhang *V*. Der Wert desselben hängt von der Länge des Fadens, seiner Natur ab, also vom Elastizitäts-Koefizienten, dem Durchmesser und der Intensität der Kraft *F*. Wenn wir den Faden aufdrehen oder zudrehen ändert sich seine Länge und der Wert des Maximaldurchhanges wechselt. Da die Intensität der Kraft die gleiche bleibt, können wir sagen, dass der Wert von *V* von der Länge des Fadens abhängig ist und die Länge des Fadens wieder von der Drehzahl abhängt. Der

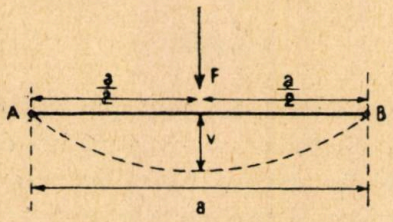


Fig. 1

Zusammenhang zwischen *V* und den anderen angegebenen Grössen ist ziemlich kompliziert und scheidet aus dem Rahmen unserer Arbeiten aus. Nach der vollständigen Aufdrehung des Fadens dreht man weiter bis die Grösse des Durchhanges mit der Grösse des Anfangdurchhanges übereinstimmt. Die Kraft *F* bleibt unverändert, die Dimensionen des Fadens sind die gleichen wie im Anfangszustande und aus diesem Grunde ist auch die Drehzahl die gleiche.

Man versteht leicht dass der Wert der Kraft *F* so gewählt werden muss, damit es nicht zu nahe an die Elastizitätsgrenze heran kommt.

Die Technik unserer Methode.

Man spannt einen einfachen Faden zwischen die Klammern der Apparates deren Entfernung zum Beispiel 10 cm beträgt. In der Mitte bringt man einen senkrechten Anzeiger an, der in Millimeter eingeteilt ist (Fig. 2) sodass der Faden ganz in der Nähe der Einteilung ist. Damit der Anzeiger *S-S'* genau in der Hälfte der Entfernung zwischen den Klammern angebracht ist, bedienen wir uns eines anderen Anzeigers *X-X'* der wagerecht angebracht wird, und der durch Verschiebung mit der Teilung Null gegenüber der Klammer *C* durch die Kontaktplatte *p* gebracht werden kann. Der Punkt *M* befindet sich genau in der Mitte des Fadens, also 5 cm von der Klammer *C* entfernt. Man notiert die Aufteilung gegenüber deren

sich der Faden befindet und hängt an diesem Punkt ein Gewicht von 1 gr. an. Man bemerkt dass der Faden unter die Wagerechte kommt z. B. mit 2 mm; dies ist der Anfang des Durchhanges.

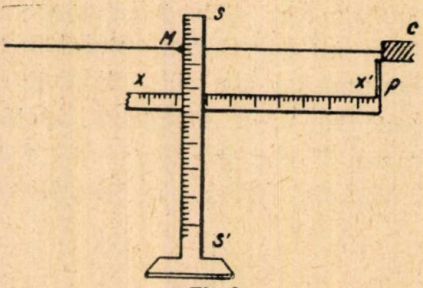


Fig. 2

Wenn man die Kraft entfernt, geht der Faden auf die Anfangsposition zurück. Die Registrierung beginnt bei der Einteilung Null, man dreht an der Welle, um das Aufrollen zu erwirken. Der Faden bekommt ein besonderes Aussehen infolge der Fasern, welche auseinandergehen. Man dreht in der gleichen Richtung weiter, bis der Aspekt des Fadens von neuem wieder normal wird. Jetzt wendet man die gleiche Kraft von einem gr. an, u. z. im Punkte *M*. Der Faden senkt sich unter die Wagerechte z. B. um 1 mm oder 3 mm; auf jeden Fall ist der Maximaldurchhang mehr oder weniger vom Anfangswert mit 2 mm entfernt. Ohne die Kraft aufzuheben, dreht man die Welle in dem einen oder anderen Sinne bis der Wert des Maximaldurchhanges genau 2 mm beträgt. Wenn *N* die vom Registrierungsapparat angezeigte Teilungszahl ist, so ist die Drehung des Fadens auf einer Länge von 10 cm.

$$x = \frac{N}{2}$$

Die Wahl der elastichen Deformierungskraft.

Der Wert der Kraft muss von der Elastizitätsgrenze genügend entfernt sein, damit man die Sicherheit hat, dass nicht die kleinste dauernde Deformierung eintritt. Hinsichtlich dieser Beziehung haben wir zahlreiche Versuche mit verschiedenen Fäden angestellt, die in der Praxis benutzt werden. Die Operation ist ganz einfach, sie besteht in der Messung des von sehr kleinen Kräften hervorgerufenen Maximaldurchhanges, vor und nach der Anwendung von relativ grossen Kräften. Auf diese Weise haben wir es zustandegebracht, dass für einen Maximaldurchhang von maximum 3 mm nicht die kleinste dauernde Deformierung hervorgerufen wird, und aus

diesem Grunde muss die Kraft der elastichen Deformierung zwischen 1 gr und 0,2 gr liegen, wenn die Distanz zwischen den Klammern zwischen 5 und 25 cm liegt Diese Resultate zeigen wie dargelegt wird dass für jeden zu studierenden Faden, das entsprechende Gewicht zu wählen ist.

Obwohl die Limite, in welchen der Wert der Kraft liegt genügend nahe sind, haben wir dieses Problem vollständig gelöst, indem wir einen einfachen Apparat konstruiert haben, mit dessen Hilfe wir nach unserem Willen die einem bestimmten Maximaldurchhang entsprechende Kraft wirken lassen können.

Das Prinzip des Apparates ist das gleiche, wie jenes der Wage von MOHR-WESTPHAL *für die Bestimmung der Dichtigkeit von flüssigen Stoffen.*

Wie aus Fig. 3 zu ersehen ist, der Apparat besteht aus eine

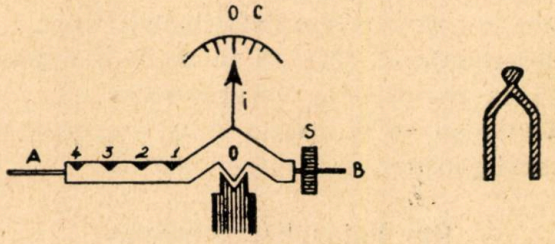


Fig. 3

Wage mit ungleichen Armen *OA* und *OB*. Das Gewicht *b* kann auf den Arm *OA* gelegt werden.

Die erzielte Wirkung durch die Deplasierung des Gewichtes längs *OA* ist gleich der Wirkung einer Kraft mit einem Angriftpunkt in *A*, deren Wert zwischen 0,2 gr. bis zu ungefähr 1 gr. schwankt. Der Apparat wird am Messungsapparat für Drehung SCHOPPER auf dem Träger des Armes angebracht, der für die Kontrolle des Parallelismus zwischen den Fasern des umgesponnenen Faden verwendet wird. Ein an diesem Träger angebrachter Zeiger kann auf der Gradierung des Apparates genau auf der Hälfte der Entfernung zwischen den Klammern angebracht werden. In diesem Falle können wir den eingeteilten wagerechten Anzeiger aus Fig. 2 entbehren.

Arbeitsweise.

Wir lassen den Träger, der den Apparat hält, pendeln, bis der Zeiger sich in der Mitte der Entferung zwischen den Klammern befindet; jetzt befindet sich der Einschnitt unter Punkt *A* (Fig. 3) der auf den Faden drücken soll, genau im Punkte *M* (Fig. 2). Das

Gewicht *S* ist auf dem Arm mit Schraube drehbar, bis die Nadel sich bei der Teilung *O* des Zifferblattes *C* befindet, wenn der Hebel der Wage wagerecht ist.

Wenn der Faden zwischen den Klammern festliegt, bringt man *b* (den Reiter) (Fig. 3) langsam auf die Einschnitte, des Armes *OA*, bis der Maximaldurchhang des Fadens, gemessen auf dem senkrechten eingeteilten Anzeiger 2 mm beträgt, oder auch 2,5 mm. Wir nehmen an, das wir hierfür das Gewicht auf Punkt 2 gelegt haben. *Wir heben* dieses Gewicht auf, und fahren mit der vorher beschriebenen Manipulation fort. Wir probieren den Wert des Maximaldurchhanges am Ende, indem wir das Additionalgewicht auch auf den Punkt 2 bringen und wir können die Drehung oder Aufdrehung des Fadens fortsetzen, ohne dieses Gewicht aufzuheben, bis der Maximaldurchhang mit dem jenigen aus dem Anfangszustande übereinstimmt (2 mm oder 2,5 mm).

Wir können das gleiche Resultat erhalten, wenn wir die Abteilungen des Zifferblattes *C* (Fig 3) an Stelle der gradierten senkrechten Anzeigers aus der Fig. 2 verwenden.

Die Manipulation ist in diesem Falle bequemer und die Aufzeichnungen sind genauer.

Die Versuchsergebnisse.

Wir geben in den folgenden Aufstellungen eine Anzahl erzielter Resultate bei einigen Fadeproben mit der Methode MARSCHIK sowie mit unsere Methode.

Die Entfernung zwischen den Klammern, in der Aufstellung mit L notiert, sind in Zoll ausgedrückt. Die Drehung in Sinne der Drehung mit N_2. Die Drehanzahl auf ein Zoll ist mit N_z ausgedrückt. Die kleinen Brüche der Ziffern aus den Aufstellungen sind vernachlässigt worden.

Versuche mit einem Baumwollfaden Nr. 12

Nr.	MARSCHIK - Methode				Unsere Methode		
	L	N_2	N^1	N_z	L	N_2	N_z
1	1	58	31	13,5	4	93	11.6
2	„	55	32	11,5	„	97	12
3	„	63	32	11,5	„	88	11
4	„	62	27	17,5	„	100	12,5
5	„	60	32	14	6	142	11,8
6	„	55	34	10,5	„	145	12
7	6	233	87	12,3	„	137	11,4
8	„	219	83	11,3	„	139	11,5
9	„	238	72	13	8	180	11,25
10	„	214	85	10,75	„	202	12,6

Bei Überprüfung obiger Aufstellung stellen wir folgendes fest:
1. Die mit der Methode MARSCHIK erhaltene Drehungsahl schwankt zwischen $N_z=10,5$ und $N_z=17,5$ für die gleiche Entfernung zwischen den Klammern (1 Zoll), während bei der von uns angewandte Methode mit dem gleichen Faden die Drehzahl zwischen $N_z=11$ und $N_z=12,5$ schwankt.

2. Für die Länge eines grösseren Faden (Entfernung zwischen den Klammern 6 Zoll) schwankt das erhaltene N_z durch die Methode MARSCHIK zwischen engeren Limiten u. z. zwischen $N_z=10,75$ und $N_z=13$; was die Bemerkung von PINAGEL bestätigt, dass die Methode MARSCHIK bei einer relativ grossen Fadenlänge gute Resultate gibt. Bei der Entfernung von 6 Zoll zwischen den Klammern sind die Resultate nach unserer Methode genau und schwanken zwischen $N_z=11,5$ und $N_z=12$. Die graphische Darstellung der Unterschiede der durch die zwei verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate ist folgende:

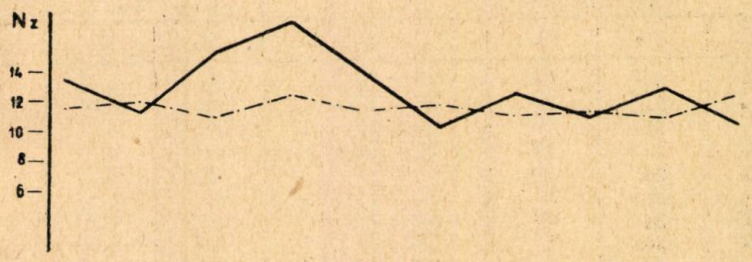


Fig. 4

Die volle Linie stellt die mit der Methode MARSCHIK erhaltenen Resultate dar, die punktierte Linie, die mit unserer Methode erzielt wurde ist relativ kleiner und hängt nicht von den Entfernungen zwischen den Klammern ab.

II: Versuche mit einem Baumwollfaden Nr. 10

Nr.	MARSCHIK - Methode				Unsere-Methode		
	L	N_2	Nl	Nz	L	N_2	Nz
1	3	144	69	12,5	2	42	10,5
2	„	138	81	9,5	„	40	10
3	„	129	78	8,5	4	76	9,5
4	„	147	71	11	„	83	10,3
5	„	135	75	10	„	81	10
6	„	150	84	11,5	6	117	3,75
7	„	156	87	11,5	„	120	10
8	„	147	78	11 5	8	167	10,5
9	„	138	84	9.5	„	164	10,25
10	„	137	80	9,5	10	205	10,25

Für diesen Faden haben wir für die Methode MARSCHIK die gleiche Entfernung von 3 Zoll genommen und verschiedene Entfernungen z. B. 2 Zoll und 10 Zoll für unsere Methode.

Es werden die gleichen Beobachtungen wie auch im vorigen Falle gemacht. Dies kann man aus den unter (Fig. 5) dargestellten Kurven sehen.

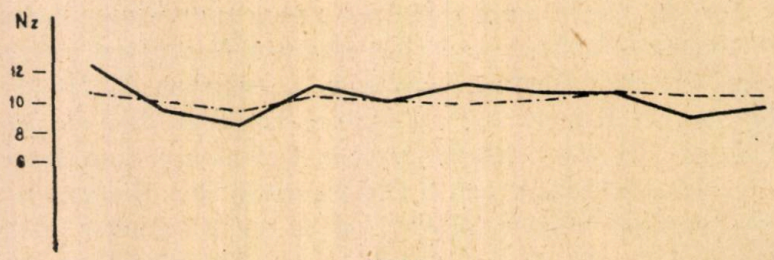


Fig. 5

Prüfungen mit einem Wollfaden Nm 6

Nr.	MARSCHIK - Methode				Unsere-Methode			
	L	N_2	Nl	Nz	L	N_2	Nz	
1	1	31	20	5,5	2	31	5,25	
2	"	31	16	7,5	"	22	5,5	
3	"	33	16	8,5	"	20	5	
4	"	31	19	7	4	39	5	
5	"	29	15	6	"	44	5,5	
6	"	31	21	5	"	41	5,25	
7	"	31	20	5,5	5	52	5,25	
8	"	30	17	6,5	6	64	5,30	
9	"	34	15	9,9	8	84	5,25	
10	"	32	16	8	"	81	5	

Wir haben für die Methode MARSCHIK eine kleine Fadenläge (1 Zoll) und für unsere Methode eine Länge zwischen 2 und 8 Zoll genommen Man bemerkt hier die Beständigkeit der durch unsere Methode erhaltenen Resultate. Die Schwankungen durch die Methode MARSCHIK bewegen sich in grösseren Limiten, da die Entfernung zwischen den Klammern klein ist.

Mit Fig. 6 werden die Kurven der beiden Schwankungen dar-

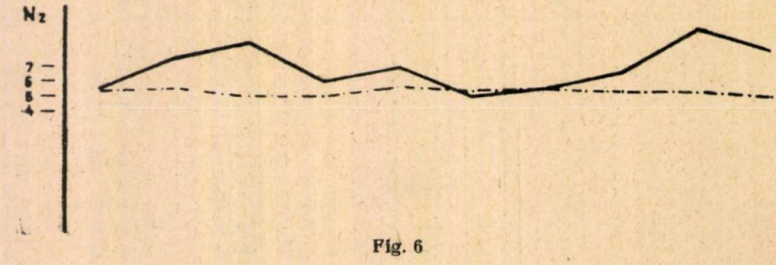


Fig. 6

gestellt. Interessanter Weise sicht man dass die Abweichungen, die die Methode MARSCHIK zeigt, sich nur in einem Sinne und zwar über dem Mittel bewegen z. B. wen N_z auf 5 festgelegt ist. Wenn man dann den Durchschnitt der Resultate nimmt, so kann das Endresultat oftmals falsch sein.

Schluss - Folgerungen

Die Methoden für die Bestimmung der Drehzahl von Faden bedingen, dass die Entfernung zwischen den Klammern klein sein, falls die Fäden aus kurzen Fasern hergestellt sind, und zwar darum, weil sie mit Leichtigkeit, infolge der Kraft, die durch Drehung und Spinnung entsteht, rutschen können. Je kleiner die Entfernung zwischen den Klammern ist, desto schwankender sind die Resultate bei einem einzelnen Faden und auch ebenso ungenau nach der Methode MARSCHIK und nach allen anderen Methode. Nach unserer Methode bleibt die Elastizität des Fadens erhalten denn die grösste Drehung während der Zeit des Vorgangs ist diejenige, die der Faden im normalen Zustande hat. Die elastische Deformierungskraft für die Hervorbringung des Maximalduchhanges kann klein gewählt verden, und ihr Einfluss ist ohne Wichtigkeit, wenn die Entfernung zwischen den Klammern grösser ist als 2 Zoll. Unsere Methode kann mit der gleichen Genauigkeit für alle Fäden angewandt werden ohne Rü ksicht auf die Länge der Faser. Zu diesem Vorteil kommt die grosse Genauigkeit der Resultate hinzu, die durch unsere Methode erzielt wird.

72.03 ARCHITECTURE

L'ART ROUMAIN ANCIEN EN BESSARABIE

par **Toma T. Socolescou**
Professeur-Architecte

La Bessarabie a toujours été roumaine et elle l'est restée même pendant les cent ans d'occupation forcée, par les Russes. Elle a conservé son caractère, sa langue et ses traditions nationales. La preuve la plus éloquente nous en est donnée par l'art populaire, le costume, les tapis et les maisons Roumaines de Bessarabie.

Les tapis sont des plus beaux et des plus originaux et rivalisent avec ceux de l'Oltenia. Quant au maisons que l'on peut remarquer d'après les clichés reproduits ici même, elles sont tout à fait semblables à celles de l'Ancien-Royaume. Il en est de même pour toutes les fondations de nos boyards et voïvodes, les monastères et les forteresses qui veillent sur les rives du Dniester.

Ce n'est pas au point de vue historique, mais au point de vue ethnographique et artistique, que je prouverai, dans les lignes qui vont suivre, notre ancienneté et notre continuité en Bessarabie.

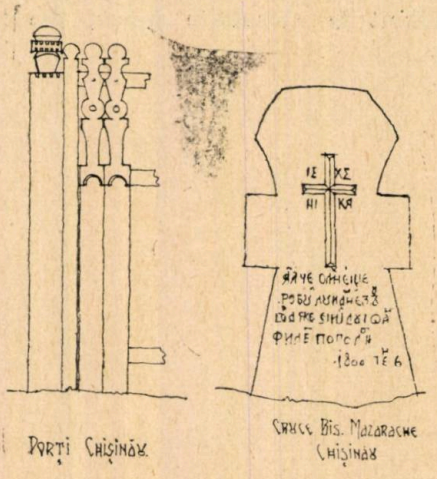
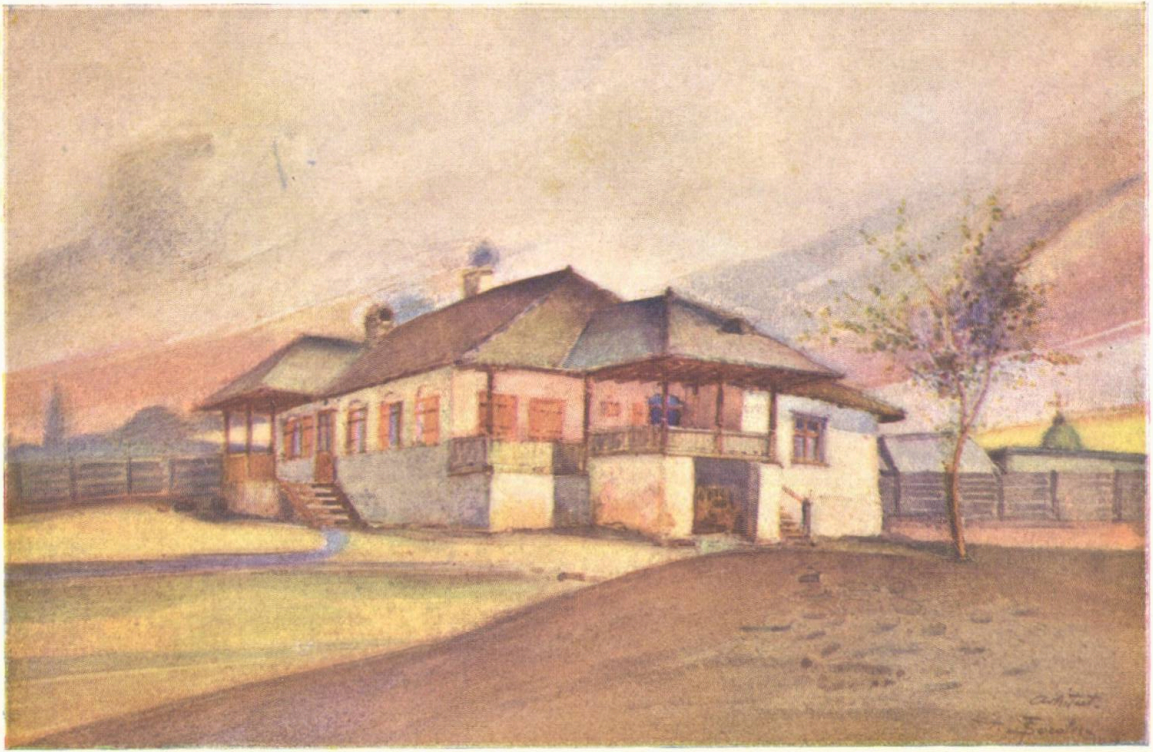


Fig. 1—2. — Clôture en planches d'une vieille maison roumaine, donnant sur une rue à Chişinău-Croix de pierre de l'église MAZARACHE de Chişinău.

Bien longtemps avant l'ère chrétienne, nous avons créé un art populaire admirable, complet et original, dans tout le pays occupé par nous jusqu'à l'Adriatique, différencié selon les provinces, mais d'où l'on peut reconnaître la même mère-patrie; cet art est



Pl. I. — Ancienne maison seigneuriale de Chişinău.

unitaire comme notre langue et fait ressortir mieux que toute autre chose, l'être physique et moral de notre peuple.

Jusqu'en 1812, lorsque la Bessarabie a été occupée pour la première fois par les russes, rien de russe n'a existé dans cette pro-

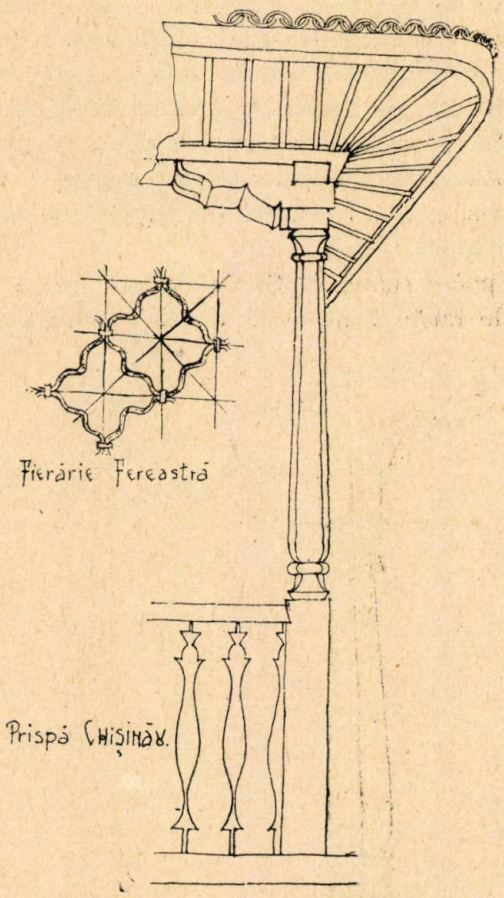


Fig. 3. —. Piliers de bois et balustrade d'une vieille maison roumaine de Chişinău.

vince, aucun vestige historique ou artistique, rien que l'héritage légué par nos ancêtres. Toutes les somptueuses cités, qui aujourd'hui encore se reflètent dans les flots calmes du Dniester, sont les oeuvres des princes règnants de Moldavie; les églises et les monastères sont leurs fondations ainsi que celles des seigneurs (boyards) moldaves. [1])

1) P. GORE Commiss. Monuments historiques; Section de Bessarabie, Année 1924, Page V Préface.

En 1812, les russes ont trouvé en Bessarabie 775 églises et peu de temps après, la plupart sont tombées en ruines, les unes disparaîssant complètement; après un siècle d'esclavage, il n'en restait plus que 104. L'Eglise la plus ancienne, Saint-Jean de Cetatea-Alba, date de la fin du XIII-ème siècle. Beaucoup de fondations, bâties, grâce à la générosité des princes règnants, ont suivi celle-ci, telles: le Couvent Capriana sous le règne de PETRU RAREŞ, l'Eglise Saint-Nicolas de Chilia-Noua, sous le règne de VASILE LUPU, et tant d'autres qu'on pourrait encore citer. [2])

Les habitations ainsi que le bel art ménager, si varié comme dessins et coloris, sont les oeuvres du paysan moldave, qui formait l'élite de ces régions.

Le grand poète russe, A. S. POUCHKINE, qui a vécu en Bessarabie et dont le buste sculpté se dresse encore à Chisinau, a dit

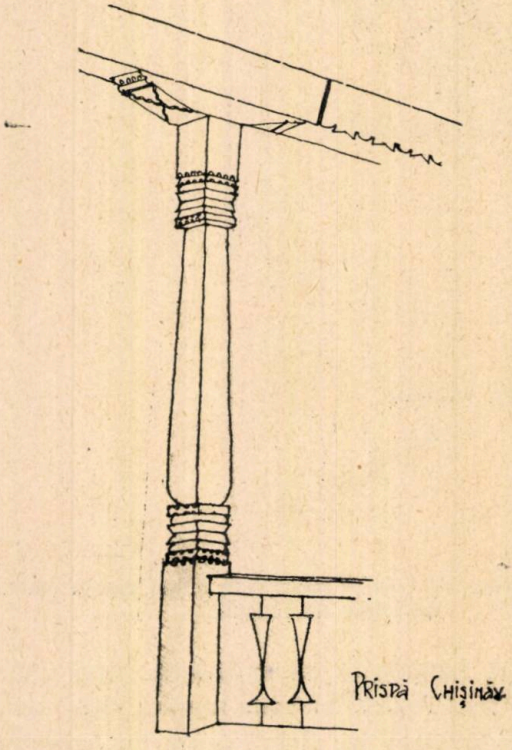


Fig. 4. — Piliers de bois d'une vieille maison roumaine de Chişinău.

que: „La barbarie et l'ignorance ne respectent pas le passé, ne sachant ramper que devant le présent; le manque de vénération dûe aux ancêtres, est la preuve évidente de l'ignorance et de l'im-

2) ST. CIOBANU, Ibidem page 1.

Pl. II. — Maison d'un petit artisan (matelassier) roumain de Chişinău.

moralité". Je viens de citer ce fragment de pensée occidentale, appartenant à un écrivain russe, qui forme un étrange contraste avec la violation des frontières de notre pays l'an dernier, car notre peuple a créé tant d'histoire et de vieilles traditions sur cette terre de Moldavie plusieurs fois millénaire, située par une étrange fatalité, aux confins de l'Europe et par malheur au voisinage immédiat de l'Asie.

Je me suis trouvé à Chişinău en 1918, peu de temps après la délivrance et j'ai visité de près les quartiers faubouriens de la ville, recherchant les traces de notre ancien art national.

Les églises que j'ai vues à Chişinău, avaient été sensiblement transformées pendant l'occupation russe et gardaient de ce fait, très peu de leur forme originaire; d'autres, par contre, situées dans des endroits mieux surveillés, telle l'Eglise de Căuşani — grande ville commerciale qui fut un temps le capitale des Tartares de Budgeac, gardée par l'armée, possèdant des palais pour les Khans, où résidaient même les représentants diplomatiques des états européens — demeurent encore intactes, comme forme extérieure, as-

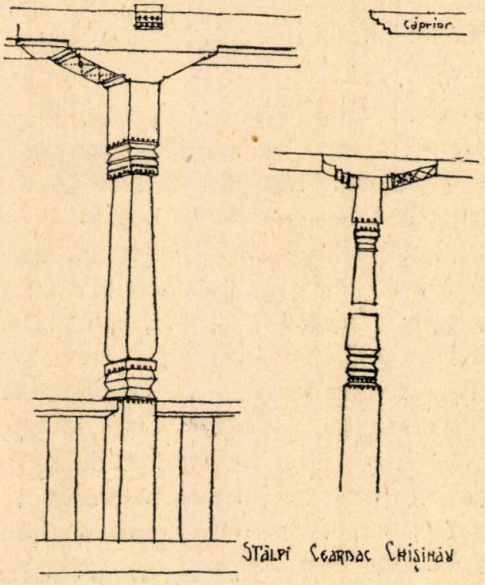


Fig. 5. — Piliers de bois d'une vieille maison roumaine de Chişinău.

sez particulière, et surtout à l'intérieur où les fresques ornementales, ainsi que les saints et les boyards avec leurs bonnets et leurs soutanes, qui soutiennent de leurs mains l'eglise fondée par l'évè-

que DANIEL de Braïla, datant depuis 250 ans, sont semblables à toutes les autres de chez nous. [3])

Quant aux maisons, ces modestes constructions dépourvues de solidité, faites de matériaux éphémères, par les paysans roumains et qui, pour cause, ne peuvent être trop anciennes, ces maisons ont en Bessarabie, comme dans toutes les autres parties de la Roumanie, un je ne sais quoi d'ancien et de durable, quelque chose d'éternel qui a affronté les siècles et qui se perpétuera tant que la Roumanie et le peuple roumain existeront.

Ce quelque chose réside dans la disposition et la forme caractéristique de la maison roumaine, cet instinct d'art et de beauté qui vit au fond de l'âme de notre peuple et qui nous a transmis depuis un temps immémorial, un art populaire complet, original, d'une rare distinction.

J'ai trouvé dans ces faubourgs de Chișinău, beaucoup de maisons roumaines qui gardent leurs anciennes formes ainsi que la décoration bien connue chez nous, la décoration des crénelures en bois et crépissage. J'ai esquissé et dessiné en aquarelle, trois de ces maisons les plus caractéristiques et originales. Elles ont été reproduites dans un livre de propagande, lorsque la paix fut signée, et que nos droits historiques et ethniques sur cette veille province, furent reconnus. [4])

Elles représentent trois types différents de vieilles maisons roumaines: la première, une ancienne maison seigneuriale, située au milieu d'une large cour, que j'ai trouvée dans un état de réel abandon; la seconde est le type d'une maison d'artisan ou d'agriculteur, formée comme le sont habituellement les habitations du pays, surtout dans les régions des collines; elle était habitée par la famille d'un matelassier roumain; la troisième forme le type d'une maison ayant au rez-de-chaussée un local pour magasin et ses dépendances et à l'étage, une tourelle au-dessus de la boutique ainsi qu'une terrasse et plusieurs chambres. C'est le type d'une maison de négociant ou d'artisan, dont le toit fait de tuiles, la clôture et les hautes portes dénotent l'influence balcanique. Elle est située dans un quartier de commerçants et de petits artisans.

Ces maisons, comme tant d'autres des faubourgs roumains de la ville, dont je reproduis d'après dessins pris sur les lieux, en quelques clichés, des piliers, des balustrades, des auvents de bois,

3) N. IORGA, Neamul Românesc en Bessarabie, pages 173-174.

4) Depuis peu, le journal quotidien „Universul" a commencé à les publier et elles devaient également paraître dans un livre sur la Bessarabie, que préparait le profeseur N. IORGA, de la part de l'Academie Roumaine.

Pl. III. — Maison d'un négociant roumain de Chișinău.

etc., sont la preuve certaine de la perpétuité du peuple roumain dans cette province, où dans la capitale même, sous la domination russe, l'on a construit dans le style hérité de nos ancêtres les Thraces, style également répandu dans tout le pays. [5])

L'art dans le métier des tissus et des tapis, qui embellissent aujourd'hui bien des intérieurs de Bucarest et d'autres villes, ainsi que certains musées et collections particulières, complète l'art ancien populaire roumain, lequel s'est si heureusement développé dans cette malheureuse province. Il est à peu près inexplicable que cette habileté dans l'art des tapis, soit devenue exceptionnellement florissante aux deux extrémités du pays: dans la province de l'Oltenia, dont les plus beaux dessins représentent exclusivement des fleurs et en Bessarabie où prédominent les motifs géométriques qui nous viennent de nos ancêtres les Thraces et qui prédominent aussi dans notre art populaire. Bien entendu, parfois les deux systèmes se mêlent l'un à l'autre, pourtant les tapis olténiens ne ressemblent en rien aux tapis bessarabiens. Bien que les habitants de ces deux provinces aiment autant les fleurs, on distingue clairement leurs conceptions différentes, qui aboutissent à des réalisations différentes; la variété des dessins bessarabiens est beaucoup plus riche, tandis que la composition des dessins olténiens est plus classique. Une chose demeure certaine en tout cas: tant l'Olténia que la Bessarabie sont situées au premier plan dans l'art des tapis roumains. [6])

Toutes ces manifestations supérieures ethnographiques de Bessarabie, prouvent la continuité et la solidité de nos droits, lesquels, bien q'uindiscutables, ont été menacés l'été de l'année panée.

EXPLICATION DES PLANCHES:

Pl. 1 Chişinău: Vieille maison seigneuriale
(*Aquarelle T. T. Socolescou*)

Pl. 2 Chişinău: Maison d'un matelassier
(*Aquarelle T. T. Socolescou*)

Pl. 3 Chişinău: Maison d'un négociant
(*Aquarelle T. T. Socolescou*)

5) La planimétrie de la partie moldave de la ville de Chişinău — de l'ancienne ville donc — comprend les rues radiales qui mènent aux deux marchés d'approvisionnement, a été jugée supérieure en matière d'urbanisme, par le professeur de l'Académie d'Architecture de Pétrograde; cette remarque a été faite par lui même dans son traité sur l'urbanisme.

6) Pour une complète édification sur ce sujet, consulter tout d'abord: l'Art populaire en Roumanie par N. IORGA et L'Art du paysan Roumain par G. OPRESCOU.

BULETINUL POLITEHNICEI DIN BUCUREȘTI

XII (1941) Nr. 1—4

SOMMAIRE:

			Pag.
	Géométrie.		
NICOLAS RAȚLIȘ	Théorème de fermeture	(Nr. 1-2)	5— 8
ȘERBAN GHEORGHIU	Sur un théorème de M. POMPEIU . .	(Nr. 3-4)	221—234
	Géométrie différentielle.		
N. TEODORESCU	Sur les géodésiques de longueur nulle de certains éléments linéaires finsleriens . .	(Nr. 1-2)	9— 16
	Géometrie perspective.		
SC. RLAT FOTINO	Contribution à létude de la perspective aéronautique	(Nr. 1-2)	17— 20
	Géometrie analytique.		
I. CARSTOIU	Une propriété des coniques . . .	(Nr. 1-2)	21— 24
CESAR COȘNIȚA	Sur les paraboles inscrites à un triangle	(Nr. 1-2)	25— 36
	Analyse mathématique.		
N. CIORĂNESCU	Quelques formules de moyenne et quelques inégalités entre les valeurs moyennes des fonctions monotones	(Nr. 1-2)	37— 40
D. POMPEIU	De la constante arbitraire dans les opérations d'intégration	(Nr. 3-4)	235—241
	Nomografie.		
AL. GUȚU	Quelques nomogrammes à points alignés, pour la technique de la combustion . .	(Nr. 1-2)	41— 65
	Théorie des groupes.		
GR. C. MOISIL	Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications	(Nr. 1-2)	66— 90

Pag.

Photogrammétrie.

A. I. CORPACIU — Untersuchungen über einen wichtigen Fehler der Aerotriangulation . . . . . (Nr. 1-2) 91— 98

Mécanique.

ALEX. STOENESCU — Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant . . . . . (Nr. 1-2) 99—102

Mécanique des Fluides.

D. GERMANI — Essai d'une théorie élémentaire des déformations et des efforts intérieurs d'un fluide incompressible . . . . . (Nr. 1-2) 103—113

D. PAVEL — Strömungsbilder für einzelne oder mehrere Brunnen . . . . . (Nr. 3-4) 242—248

Electrochimie.

J. A. ATANASIU — La concentration anodique de l'acide nitrique (Nr. 3-4) . . . . . 249—261

Chimie physique.

E. TOPORESCU — Sur le renversement de la force éléctromotrice du couple étain-fer dans les acides dilués (Nr. 1-2) 114—116

Chimie analytique.

CONST. BELCOT — Sur le dosage du zinc . . . . (Nr. 1-2) 117—120

" — Sur de dosage du cuivre (V-ème note) (Nr. 3-4) 262—372

Chimie organique.

ION IRIMESCU — Beitrag zur Kenntnis den Krystallform einiger normalen Paraffinkohlenwasserstoffe mit grossem Mollekulargewicht, isoliert von Erdölwachs . . . . . (Nr. 3-4) 273—280

Pétrographie.

MIRCEA D. ILIE ET G. MANOLESCU — Calcaires organogènes dans le bassin Petroşeni (Roumanie) . . . . . (Nr. 1-2) 121—124

Anatomie morphologique.

OCTAVE VLADUŢIU — Recherches anatomiques sur les artères, les veines et les conduits biliaires intrahépatiques chez le chat . . . . . (Nr 1-2) 125—130

Essais des matériaux.

C. C. TEODORESCU — Die Beziehung zwischen dem Quellen und der Wasseraufnahme des Zementmörtels (Nr. 1-2) 131—133

A. STEOPOE — Untersuchungen über die Eigenschaften einiger Betone für Meerwassersbauten . . (Nr. 1-2) 134—144

Pag.

Électrotechnique.

C. BUDEANU — Sur la signfiication et les applications des lois de Kirchoff . . . . . (Nr. 1-2) 145—154

Mesures électriques.

VLAD RĂDULESCU — Sur l'erreur relative dans le mesure de la résistance d'un galvanométre par la méthode du shunt . . . . . (Nr. 1-2 1 5—166

Installations électriques.

A. AVRAMESCU — Erwärmungsberechnung elektrischer Kontakte . . . . . (Nr 1-2) 167 175

Téléphonie.

MATEI MARINESCU — Amplificateur pour communications teléphoniques . . . . . (Nr. 1-2) 176—182

Radiotechnique.

T. TĂNĂSESCU — Dynamische Kennlinien des C-Verstärkers (Nr. 1-2) 183—189

Bouches à Feu

I LINTEŞ — Le calcul des tubes avec chemises amovibles . . . . . (Nr. 1-2) 190 193

Constructions Aéronautiques.

G. ZAMFIRESCU — Le calcul des longerons d'aile d'avion confectionnés en bois de sapin . . . (Nr. 3-4) 303—322

Economie agricole.

N. CORNĂTEANU — Einige Anblicke der rumänischen Landwirtschaft der Donauebene . . . . . (Nr. 1-2) 194—205

Matériaux de Construction.

ŞERBAN SOLACOLU — Sur les propriétés d'isolation calorique des dechéts de mica en raport avec les matériaux usuels . . . . . (Nr. 3-4) 281—285

A. STEOPOE — Über die Beziehungen zwischen Mörtel und Betonfestigkeit . . . . (Nr. 3-4) 286 - 291

Balistique.

I. LINTEŞ — Le probléme de la balistique extérieure (Nr. 3-4) 292—302

Machines Agricoles.

G. DRĂGAN — Die Verwendung tierischer und maschineller Zugkraft in der Landwirtschaft . . (Nr. 3-4) 323—338

Pag.

Methodes de Culture agricole.

IRIMIE D STAICU — The ef effect plowing in the yield of corn, oats, peas and wheat, cultivated on brown forest soils . . . . . (Nr. 3-4) 344—347

Industries Textiles.

C. CASASSOVICI, D. TEODORESCU, I. IONESCU-MUSCEL — Eine neue Methode für die Bestimmung der Drehungszahl eines Textilfadens . (Nr. 3-4) 348—357

Sols.

C. CHIRIȚĂ — Schlüssel zur Bestimmung der genetischen Bodentypen Rumäniens . . . . . (Nr. 1-2) 206—210

GH. PAVLOVSCHI ET MAVRODINEANU — Contribution à l'étude des propriétés physiques du sol comme terrain arable et comme terrain de construction . . (Nr. 3-4) 339—343

Architecture.

TOMA SOCOLESCU — Vers une architecture roumaine moderne (Nr. 1-2) 212—222

" — L'art roumain ancien en Bessarabie . (Nr. 3-4) 348—36